FAX 053-466-6485
MAIL edu@tokai.or.jp

最大・最小値問題にみる７つの手法

さくらの個別指導
H24.10.31
さくら教育研究所

1つの問題をいろいろな手法で解くことは，数学の本質を知る上で，また応用力を身に付ける意味でも非常に大切なことです．いつも，1つの解き方だけで満足するのではなく，別なアプローチができないかなと思いを巡らしたいものです．そうすることによって，それぞれの手法が持つ本当の意味と，さらにはそれらの手法どうしの関連が相互によく見えてきて，数学の全貌をつかみ取ることができるのです．そこで，今回は最大・最小に関する1つの問題に対して7つの手法で解いてみることにします．まな板に乗せるのは以下の問題です．

> **問題**　条件 $x^2+y^2=4$（x，yは実数）のもとで，$2x+y$ の最大値，最小値を求めよ．

手法１　**「円には三角」を用いる．**

sin，cos，tan を定義したとき，円を用いて定義したはずです．すなわち，円と三角関数とは切っても切れない強い関係があるのです．つまり，円と三角関数のカップルは非常に相性がよいのです．各電鉄会社で電車の相互乗り入れが行われているように，円と三角関数の間では相互乗り入れができるのです．ですから**円に関する問題では**極力，**三角関数**の利用ができないかなと1度は試みましょう．$x^2+y^2=4$ は xy 平面上では，中心が原点の半径2の円周上の点を表すから，動径と x 軸とのなす角を θ とすれば $x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$ と表せます．θ の変域は $0\leqq\theta<2\pi$ としておけば円周上の点はすべて表せるのでこれで充分です．すると求めるべき値 $2x+y$ は $2\cdot2\cos\theta+2\sin\theta$…①となるので，結局この三角関数の最大・最小の問題に帰着します．よって，①を合成することにより容易に解決できます．

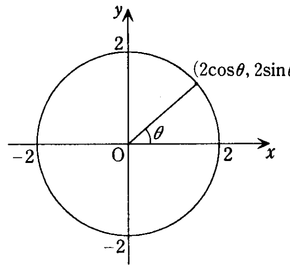

図１

$4\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{5}\cos(\theta-\alpha)$…②（ただし α は $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$…③を満たす角，なお sin を用いて合成をしてもよいが，ここでは後述の手法2との関連付けのため cos で合成しておくことにする．）となり，$\theta-\alpha$ の変域は角度にして1周分であり，また α は鋭角であることに注意して，最大値を取るときの θ は $\theta-\alpha=0$，すなわち $\theta=\alpha$ のときだから，そのときの x，y はそれぞれ $x=2\cos\alpha=-\frac{2}{5}\sqrt{5}$，$y=2\sin\alpha=-\frac{1}{5}\sqrt{5}$，最大値は $2\sqrt{5}$．最小についても同様に，$\theta-\alpha=\pi$ のとき，つまり $\theta=\pi+\alpha$ だから，これより $x=2\cos(\pi+\alpha)=-2\cos\alpha=-\frac{2}{5}\sqrt{5}$，$y=2\sin(\pi+\alpha)=-2\sin\alpha=-\frac{1}{5}\sqrt{5}$ のときで，最小値は $-2\sqrt{5}$ となる．このように，三角関数は三角と名がついているので三角形のときだけに利用されがちですが，円にも大いに利用すべきなのです．三角関数はこのように，三角形と円との両方に同じ程度に役立つのです．私は sin，cos，tan などを三角関数と呼ばないで，自分ではこっそり**円角関数**と呼んでいるくらいです．いずれにしろ**円には三角関数**がよく似合うということを標語にしておくとよいでしょう．

手法２　**１次式には内積を用いる．**

求めたい式の値 $2x+y$ は，ちょうどベクトルの成分がそれぞれ $(2, 1)$，(x, y) どうしの内積と一致します．ここで，成分が (x, y) のベクトルは大きさが2であることから，ベクトルの始点を原点にとれば，ベクトルの終点は原点を中心にした半径2の円周上を動き，一方成分が $(2, 1)$ のベクトルは，終点が第1象限にある大きさ $\sqrt{5}$ の定ベクトルで，x 軸とのなす角を α とすると，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$ であり，この角そのものが手法1での角 α と一致することも容易に分かります．（∵手法1での③を利用して $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\frac{1}{2}$）さて，これら2つのベクトルの内積にあたる①は，2つのベクトルの大きさと，そのなす角の余弦との積でもあるから，①が最大となるのは，ちょうどベクトル (x, y) とベクトル $(2, 1)$ とのなす角が0になるとき，すなわちベクトルの方向が一致するときであることが分かる．よって，最大となるときの (x, y) は，ベクトル $(2, 1)$ の単位ベクトルが $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ であることを利用して，その単位ベクトルの2倍（∵ベクトル (x, y) の大きさはつねに2である．）であることから容易に $(x, y)=\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$ のときと分かり，最大値は2つのベクトルの大きさの積となり，$2\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ である．最小は同様に考えて，ベクトル (x, y) の方向とベクトル $(2, 1)$ の方向とが逆方向になるときであるので，そのときの (x, y) は $-\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$ であって，最小値は $2\cdot\sqrt{5}\cos\pi=-2\sqrt{5}$ となる．なお，ここで (x, y) を求めるときに単位ベクトルをうまく利用しました．この単位ベクトルの用い方に慣れておくとベクトルがさらに身近なものになってくるはずです．また，ベクトル (x, y) と x 軸とのなす角を θ とすると，ベクトル (x, y) とベクトル $(2, 1)$ とのなす角は $(\theta-\alpha)$ となるから，内積の性質を用いると容易に $2x+1y=\sqrt{5}\cdot2\cos(\theta-\alpha)$ が得られ，これがまさしく手法1で用いた合成の式になることも分かるでしょう．

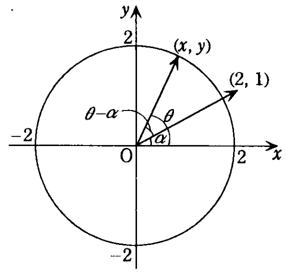

図２　ベクトル(x, y)とベクトル$(2, 1)$との内積
（α は $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ となる鋭角）

手法３　**複素数を用いる．**

突然，なぜこんなところで複素数が登場するのだろうかと不思議に思われるかも知れませんね．ところが，条件式の $x^2+y^2=4$…①を満たす xy 平面上の点を，観点を変えて複素数平面上で $x+yi=z$ として見ると，変数が z だけの1変数となり非常に扱いやすくなるのです．すると①の条件のもとでは $|z|=2$，さて次に目標の式 $2x+y$ をどうするかなのですが，うまい手があるのです．ここで共役複素数を登場させるのです．複素数というのは，たんに自分自身だけでは，役に立つことがもっぱら少なく，共役複素数と共にいつも互いに支え合い，相携えて倍以上の大活躍をするのです．つまり共役複素数を用いてこそ複素数は利用価値があるといっても過言ではないのです．そういう意味で，いつ

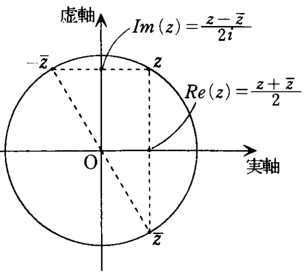

図３　z，$\bar{z}$ と実部，虚部との位置関係