

〔 1 〕 次の問いに答えよ。

(1)  $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$  の整数部分を  $a$ 、小数部分を  $b$  とする。不等式

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} < \frac{6}{a} + \frac{k}{b}$$

を満たす  $k$  の値の範囲を求めよ。

(2)  $a, b$  は定数で、 $a > 0$  とする。2次関数  $f(x) = ax^2 - 2x + b$  の定義域を  $-1 \leq x \leq 2$  とし、 $f(-1) < f(2)$  を満たすとする。関数  $y = f(x)$  の値域が  $-1 \leq y \leq 7$  であるとき、定数  $a, b$  の値を求めよ。

〔2〕 次の問いに答えよ。

(1)  $\log_2 3 = \frac{m}{n}$  を満たす自然数  $m, n$  は存在しないことを証明せよ。

(2)  $p, q$  を異なる自然数とするとき,  $p \log_2 3$  と  $q \log_2 3$  の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)  $\log_2 3$  の値の小数第1位を求めよ。

[3] 放物線  $F: y = \frac{1}{2}(x+1)^2$  上の点  $A(0, \frac{1}{2})$  を通り,  $A$  における  $F$  の接線に垂直な直線を  $l$  とし,  $l$  と放物線  $F$  との交点のうち点  $A$  と異なる方を  $B(b, \frac{1}{2}(b+1)^2)$  とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線  $l$  の方程式と  $b$  の値を求めよ。

(2) 放物線  $F$  と直線  $l$  で囲まれた部分の面積  $T_1$  を求めよ。

(3) 線分  $AB$  を直径とする円を  $C$  とする。このとき, 不等式  $y \leq \frac{1}{2}(x+1)^2$  の表す領域で円  $C$  の内部にある部分の面積  $T_2$  を求めよ。

[4] 平面上で、線分 AB を 1:2 に内分する点を O、線分 AB を 1:4 に外分する点を C とする。P を直線 AB 上にない点とし、 $\overrightarrow{PO}$  と  $\overrightarrow{PC}$  が垂直であるとする。 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$  とおくとき、次の問いに答えよ。

(1)  $\overrightarrow{PO}$ 、 $\overrightarrow{PC}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  で表せ。

(2)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を  $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$  で表せ。

(3)  $PA = 1$ 、 $\triangle PAB$  の面積が  $\frac{3}{2}$  のとき、PB の長さを求めよ。

- [5] さいころを  $n$  回投げる。  $k$  回目 ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) に投げた結果,
- 1 または 2 の目が出たとき  $X_k = 2$ ,
  - 3 または 4 の目が出たとき  $X_k = 3$ ,
  - 5 または 6 の目が出たとき  $X_k = 5$
- とする。これらの積を  $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$  とおく。次の問いに答えよ。

- (1)  $n = 5$  のとき,  $Y$  が偶数になる確率  $p_1$  を求めよ。
- (2)  $n = 5$  のとき,  $Y$  が 100 の倍数になる確率  $p_2$  を求めよ。
- (3)  $n = 2$  のとき,  $Y$  の期待値  $E$  を求めよ。