〔1〕 実数 $a$, $b$ に対して，2 次正方行列 $A$ と列ベクトル $B$ を

$$A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

と定め，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

により，座標平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し点 $\mathrm{P}'(x', y')$ が定まるものとする。次の問いに答えよ。

(1) $a = b = -1$ のとき，点 $\mathrm{P}'(3, 2)$ となる点 $\mathrm{P}(x, y)$ を求めよ。

(2) $A^2 = kE$ （$k$ は実数）を満たすとき，$a$, $k$ の値を求めよ。

(3) どんな点 P に対しても点 P$'$ が原点 O に一致しないための $a$, $b$ の条件を求めよ。

〔2〕 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 $m$, $n$ は存在しないことを証明せよ。

(2) $p$, $q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3) $\log_2 3$ の値の小数第1位を求めよ。

〔３〕　次の問いに答えよ。

(1) $a,\ b,\ c$ を定数とする。関数 $f(x) = a\cos^2 x + 2b\cos x\sin x + c\sin^2 x$ が定数となるための $a,\ b,\ c$ の条件を求めよ。

(2) 関数

$$g(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x\sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

が最大値をとる $x$ の値を $\theta$ とする。$\cos 2\theta,\ \sin 2\theta$ の値を求めよ。

(3) (2) の関数 $g(x)$ と $\theta$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\theta} g(x)\,dx$ を求めよ。

〔4〕 平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を $S$，円 $S$ と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 $S$ の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 $S$ と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) 点 P が円 $S$ の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$\theta$ で表せ。

(4) $\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ とする。$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。

〔5〕　△ABC の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が，次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，
裏が出たときは動かない。

コインを $n$ 回投げたとき，石が点 A, B, C にある確率をそれぞれ $a_n$, $b_n$, $c_n$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $a_1$, $b_1$, $c_1$ の値を求めよ。

(2) $a_{n+1}$, $b_{n+1}$, $c_{n+1}$ を $a_n$, $b_n$, $c_n$ で表せ。また，$a_2$, $b_2$, $c_2$ および $a_3$, $b_3$, $c_3$ の値を求めよ。

(3) $a_n$, $b_n$, $c_n$ のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。

(4) (3) において一致する値を $p_n$ とする。$p_n$ を $n$ で表せ。

数学（数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学Ａ，
数学Ｂ，数学Ｃ）
１０ページ　問題[５]
上から３行目，４行目

補足説明
コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする。