1 (1) 自然数x，yは，$1<x<y$および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

をみたす。x，yの組をすべて求めよ。

(2) 自然数x，y，zは，$1<x<y<z$および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

をみたす。x，y，zの組をすべて求めよ。

2 点Oを中心とする半径rの円周上に，2点A，Bを$\angle \mathrm{AOB}<\frac{\pi}{2}$となるようにとり$\theta=\angle \mathrm{AOB}$とおく。この円周上に点Cを，線分OCが線分ABと交わるようにとり，線分AB上に点Dをとる。また，点Pは線分OA上を，点Qは線分OB上を，それぞれ動くとする。

(1) CP＋PQ＋QCの最小値をrとθで表せ。

(2) $a=\mathrm{OD}$とおく。DP＋PQ＋QDの最小値をaとθで表せ。

(3) さらに，点Dが線分AB上を動くときのDP＋PQ＋QDの最小値をrとθで表せ。

3 xy平面上に放物線$C：y=-3x^2+3$と2点A$(1,\ 0)$，P$(0,\ 3p)$がある。線分APとCは，Aとは異なる点Qを共有している。

(1) 定数pの存在する範囲を求めよ。

(2) S_1を，Cと線分AQで囲まれた領域とし，S_2を，C，線分QP，およびy軸とで囲まれた領域とする。S_1とS_2の面積の和が最小となるpの値を求めよ。

4 a，b，cを正の定数とする。空間内に3点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$ C$(0,\ 0,\ c)$がある。

(1) 辺ABを底辺とするとき，△ABCの高さをa，b，cで表せ。

(2) △ABC，△OAB，△OBC，△OCAの面積をそれぞれS，S_1，S_2，S_3とする。ただし，Oは原点である。このとき，不等式

$$\sqrt{3}\,S \geqq S_1 + S_2 + S_3$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。

5 AとBの2人が，1個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1回めはAが投げる。

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら，投げた人を勝ちとしそれ以降は投げない。

(1) n回目にAがサイコロを投げる確率a_nを求めよ。

(2) ちょうどn回目のサイコロ投げでAが勝つ確率p_nを求めよ。

(3) n回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率q_nを求めよ。