

(数Ⅰ, 数Ⅱ, 数A, 数B)

1 実数 x に対して $k \leq x < k + 1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。

たとえば, $[2] = 2$, $[\frac{5}{2}] = 2$, $[-2.1] = -3$ である。

- (1) $n^2 - 5n + 5 < 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。
- (2) $[x]^2 - 5[x] + 5 < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (3) x は(2)で求めた範囲にあるものとする。 $x^2 - 5[x] + 5 = 0$ を満たす x をすべて求めよ。

2 a を正の実数, b と c を実数とし, 2点 $P(-1, 3)$, $Q(1, 4)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C とおく。 C 上の2点 P , Q における C の接線をそれぞれ l_1 , l_2 とする。

- (1) b の値を求め, c を a で表せ。
- (2) l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。
- (3) 放物線 C と接線 l_1 , l_2 で囲まれる図形の面積が1に等しくなるような a の値を求めよ。

3 a, b を実数とし, xy 平面上の 3 直線を

$$l: x + y = 0, \quad l_1: ax + y = 2a + 2, \quad l_2: bx + y = 2b + 2$$

で定める。

- (1) 直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。 P の座標を求めよ。
- (2) l, l_1, l_2 によって三角形がつくられるための a, b の条件を求めよ。
- (3) a, b は (2) で求めた条件を満たすものとする。点 $(1, 1)$ が (2) の三角形の内部にあるような a, b の範囲を求め、それを ab 平面上に図示せよ。

4 n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

- (1) s_2 を求めよ。
- (2) s_3 と a_3 を求めよ。
- (3) s_4 と a_4 を求めよ。