（数Ⅰ，数Ⅱ，数Ⅲ，数A，数B，数C）

1 実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。
たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ。

2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，以下の3つの条件を考える。

(i) $a+d=ad-bc=0$

(ii) $A^2=O$

(iii) ある自然数 n に対して $A^n=O$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) (i)ならば(ii)であることを示せ。

(2) (iii)ならば $ad-bc=0$ であることを示せ。

(3) (iii)ならば(i)であることを示せ。

3 次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の3点 $O(0,\ 0)$，$A(2,\ 1)$，$B(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を ℓ とする。3点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A'(2,\ 1,\ 0)$，$B'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $C(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 ℓ と共有点をもつとき，a，b，c の満たす条件を求めよ。

4 nを2以上の自然数，qとrを自然数とする。1からnqまでの番号がついたnq個の白玉，1からnrまでの番号がついたnr個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を，1番からn番まで番号づけられたn個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉はq個ずつ，赤玉はr個ずつ配分しておく。たとえば，1番の箱には番号1からqの白玉と番号1からrの赤玉が入っている。これら$n(q+r)$個の玉をn個の箱に以下のように再配分する。1番の箱から1個の玉を取り出して2番の箱に移し，次に2番の箱から1個の玉を取り出して3番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後にn番の箱に1個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数をs_nとし，n番の箱の白玉が$q+1$個であるような再配分の総数をa_nとする。

(1) a_2，a_3を求めよ。

(2) s_nを求めよ。

(3) $a_{n+1}-a_n$を求めよ。

(4) a_nを求めよ。

5 $0<a<2\pi$とする。$0<x<2\pi$に対して

$$F(x)=\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

と定める。

(1) $F'(x)$を求めよ。

(2) $F'(x)\leqq 0$となるxの範囲を求めよ。

(3) $F(x)$の極大値および極小値を求めよ。