$\boxed{1}$ 座標平面上に点 $\mathrm{A}(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $\mathrm{B}(\frac{4}{3}, 0)$, $\mathrm{C}(\cos\theta, -\sin\theta)$ がある。ただし，$0 < \theta < \pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC と x 軸の交点を P とする。P の座標を θ で表せ。

(2) $\triangle$ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) 面積 $S(\theta)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$B = P^{-1}AP$ とおく。また，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，a_n，b_n を

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) P^{-1} および B を求めよ。

(2) a_n，b_n を求めよ。

(3) 実数 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。このとき

$$\left[(2+\sqrt{3})^n\right] = a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を示せ。また

$$c_n = (2+\sqrt{3})^n - \left[(2+\sqrt{3})^n\right]$$

とするとき，$\lim_{n\to\infty} c_n$ の値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $1 - \cos\dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{x^2}{8}$ を示せ。

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^x\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。I_1 の値を求めよ。

さらに，等式 $I_n = 2^n e^2 - nI_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$ を示せ。

(3) I_2, I_3, I_4 および I_5 の値を求めよ。

(4) 不等式 $\displaystyle\int_0^4 \left(1 - \cos\frac{x}{2}\right) e^{\sqrt{x}}\,dx \leqq -2e^2 + 30$ を示せ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して，$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ。また

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

を示せ。

(2) 2 以上の自然数 n に対して

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \log n$$

を示せ。

(3) 2 以上の自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e\,e^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{1}{3}} \cdots e^{\frac{1}{k}}} > \frac{1}{e}\log(n+1)$$

を示せ。