

数 学

平成 23 年 度

入 学 試 験 問 題

受 験 番 号	
---------	--

1. 注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) この問題冊子は 16 ページあります。
試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて、監督者に知らせなさい。
- (3) 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。
- (4) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。
- (5) 解答用紙には、氏名、受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があるので、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
- (6) 計算機能をもつ時計、計算器具などの使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。
- (7) 試験終了後、解答用紙はもちろん、問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解 答 上 の 注 意

解答上の注意は、裏表紙にも記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。またマークシート左下に記載してある「注意事項」も読んでおきなさい。

- (1) 問題は , , の 3 問あります。
- (2) 各問題文中の , などの には、数値または符号 (+, -)が入ります。これらを次の方法で、解答用紙の指定欄に、解答しなさい。

裏表紙につづく

解答を始めるまえに、つぎの解答上の注意のつづきを読みなさい。

解答上の注意のつづき

(i) 分数の形の解答枠に、整数の解答をしたいときは、分母が 1 の分数の

形になるように答えなさい。たとえば、 $\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは、 $\frac{2}{1}$ と答えなさい。

(ii) 解答枠 $\boxed{\quad}$ に、解答枠の けた数 より少ない けた数 の整数を解答したいときは、数字が右づめで、その前を 0 でうめるような形で答えなさい。たとえば、 $\boxed{\text{ヨワ}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは、02 と答えなさい。ヨの 0 をマークしないままにしておくと、間違いになります！
(解答上の注意終)

1 $0 \leq u < 1$ とする。座標平面上に点 A(u , 1), 点 B($2-u$, 1), 点 C(2, 0)がある。点 P は原点 O を出発し、線分 OA 上を点 A に向かって速さ 3 で進み、次に点 A から点 B に向かって線分 AB 上を速さ 5 で進み、さらに点 B から点 C に向かって線分 BC 上を速さ 3 で進む。点 P が点 C に達するまでの所要時間を $f(u)$ とする。

(1) $f(u) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \sqrt{u^2 + \boxed{\text{ウ}}} + \frac{\boxed{\text{エ}} - 2u}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $f(u)$ を u で微分すると

$$f'(u) = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \frac{u}{\sqrt{u^2 + \boxed{\text{ク}}}} - \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

となる。

(3) $f(u)$ が最小となる u の値は $u = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ で、このとき、 $f(u)$ の

値は

$$f(u) = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$$

となる。

2 $x > 0$ で定義された 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ が次の (a), (b) を満たすとする。

(a) $f'(x) + g'(x) = \frac{5}{x}$ (b) $2f'(x) - 3g'(x) = 5x$

(1) $f'(x) = x + \frac{\text{ア}}{x}$, $g'(x) = -x + \frac{\text{イ}}{x}$ である。

(2) $a > 0$ とし、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線を l_1 , 曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(a, g(a))$ における接線を l_2 とする。また、直線 l_1 の傾きを $\tan \theta_1$, 直線 l_2 の傾きを $\tan \theta_2$ とする。ただし、 $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ とする。

(i) 直線 l_1 が直線 l_2 に垂直であるとき、 $a^2 = \sqrt{\text{ウ}}$ である。

(ii) 直線 l_1 が直線 l_2 に垂直でないとする。このとき、 $\tan(\theta_1 - \theta_2)$ を a を用いて表すと

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\text{エ} a^3 + a}{-a^4 + \text{オ}}$$

であり、

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} = \text{カ} \qquad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} = \text{キ}$$

が成り立つ。

(3) 関数 $f(x)$, $g(x)$ がさらに次の (c), (d) を満たすとする。

(c) $f(e) - g(e) = e^2$

(d) $f(2e) + g(2e) = 5 \log 2$

ただし, e は自然対数の底であり, \log は自然対数を表す。

(i)

$$f(x) = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} x^2 + \boxed{\text{コ}} \log x - \boxed{\text{サ}},$$

$$g(x) = -\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} x^2 + \boxed{\text{セ}} \log x - \boxed{\text{ソ}} \text{ が成り立つ。}$$

(ii) 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ および 2つの直線

$x = e$, $x = 2e$ で囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} e^3 + \left(\boxed{\text{ツ}} \log 2 - \boxed{\text{テ}} \right) e$$

である。

3

(1) 赤球 4 個, 白球 5 個が入った箱の中から 2 個の球を同時に取り出す。
取り出した球のうち赤球の個数を X とする。

(i) $X = 0$ である確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(ii) $X = 1$ である確率は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) 赤球が m 個, 白球が n 個入っている箱の中から 2 個の球を同時に取り出す。取り出した球のうち赤球の個数を X とする。ただし, $m \geq 2$, $n \geq 2$ とする。

(i) $X = 1$ となる確率は

$$\frac{\boxed{\text{カ}} \, mn}{\binom{m \, \boxed{\text{キ}} \, n}{m} \binom{m \, \boxed{\text{ク}} \, n \, \boxed{\text{ケ}} \, 1}{m}}$$

である。ここで, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ は, それぞれ, 符号 $+$, $-$ のいずれかである。

(ii) X の期待値は

$$\frac{\boxed{\text{コ}} \, m}{m \, \boxed{\text{サ}} \, n}$$

である。ここで, $\boxed{\text{サ}}$ は, 符号 $+$, $-$ のいずれかである。

とくに, X の期待値が $\frac{8}{7}$ であるとき,

$$\frac{m}{n} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

(iii) $X = 1$ となる確率が $\frac{1}{2}$ であるとき, m, n の値は

$$m = \boxed{\text{セソ}}, n = \boxed{\text{タチ}}$$

である。ただし, $30 \leq m + n \leq 40, m \geq n$ とする。

計 算 用 紙

計 算 用 紙

計 算 用 紙

計 算 用 紙

計 算 用 紙

計 算 用 紙

計 算 用 紙

計 算 用 紙

解答上の注意のつづき

(i) ア, イ, ウ, …… の1つ1つは, それぞれ, 0 から 9 までの数字, または, +, - のいずれか 1つに対応します。それらを, ア, イ, ウ, …… で示された解答欄にマークしなさい。

〔例1〕 に -30 と答えたいときは,

ア	+	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	+	-	0	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8	9
ウ	+	-	<input checked="" type="radio"/>	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(ii) 分数の形の解答が求められているときは, 既約分数で, 分母が正の数になる形で答えなさい。

〔例2〕 $\frac{\input type="text" value="オ}}{\input type="text" value="カ}}$ に $-\frac{5}{6}$ と答えたいときは,

エ	+	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	+	-	0	1	2	3	4	<input checked="" type="radio"/>	6	7	8	9
カ	+	-	0	1	2	3	4	5	<input checked="" type="radio"/>	7	8	9