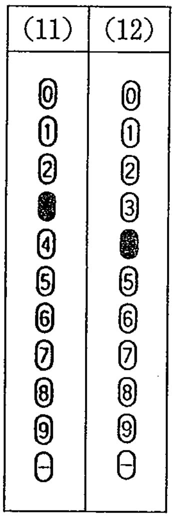
解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の［1］から［4］までの解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしなさい．

　［例］ $\boxed{(11) \;\vdots\; (12)}$ と表示のある問いに対して，「34」と解答する場合は，次の例のように解答欄（11）の ③ にマークし，解答欄（12）の ④ にマークしなさい．



　なお，解答欄にある ⊖ はマイナス符号 − を意味します．

2. 解答欄（1），（2），………，（57）の一つ一つは，それぞれ 0 から 9 までの数字，または，マイナス符号 − のいずれか一つに対応します．それらを，（1），（2），………，（57）で示された解答欄にマークしなさい．

　下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号は左端に置きなさい．空のマスがあれば 0 を補いなさい．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答しなさい．

［例］

$$3 \longrightarrow \boxed{0 \;\vdots\; 3}$$

$$-x \longrightarrow (-1)x \longrightarrow \boxed{- \;\vdots\; 1}\, x$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{- \;\vdots\; 2}}{\boxed{0 \;\vdots\; 3}}$$

［１］ $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$ を頂点とする正方形 $ABCD$ の4辺および内部を領域 X とする．$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ とし，不等式 $y \geqq f(x)$ の表わす領域を Y とする．次の条件（ア），（イ），（ウ）をみたす $f(x)$ のうち，a が最大となる $f(x)$ を求めたい．

（ア） 放物線 $y=f(x)$ の頂点は線分 AB 上にある．

（イ） 線分 CD は Y に含まれる．

（ウ） $X \cap Y$ と X の面積比は $3:4$ である．

（１） （ア）は，不等式

$$-\boxed{(1)}\,a \leqq b \leqq \boxed{(2)}\,a$$

と等式

$$c=\frac{\boxed{(3)\,(4)}}{\boxed{(5)}}\frac{b^2}{a}+\boxed{(6)\,(7)}$$

が同時に成立することと同値である．

（２） （イ）は，不等式

$$\boxed{(8)\,(9)}\,a+\boxed{(10)\,(11)}\,c-1 \leqq b \leqq \boxed{(12)\,(13)}\,a+\boxed{(14)\,(15)}\,c+1$$

が成立することと同値である．

（３） さらに（ウ）をもちいると

$$c=\frac{\boxed{(16)\,(17)}}{\boxed{(18)}}a+\frac{\boxed{(19)\,(20)}}{\boxed{(21)}}$$

となる．

（４） （１）と（３）の等式より，a と b の関係式が得られる．この式をみたす a の最大値とその a に対応する b の値が求まる．さらに（１）または（３）の等式より，そのときの c の値が求まる．これらは（１）と（２）の不等式をみたすので，求める a, b, c は

$$a=\frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}},\quad b=\boxed{(24)},\quad c=\boxed{(25)\,(26)}$$

であることがわかる．

［２］　原点を通る傾き t の直線 $y = tx$ が，放物線 $y = x^2 + ax + b$ $(b > 0)$ の接線となるための必要十分条件は，t が

$$t^2 + \boxed{(27)\ (28)}\, at + \boxed{(29)\ (30)}\, a^2 + \boxed{(31)\ (32)}\, b = 0$$

をみたすことである．このとき 2 本の接線の方程式は

$$y = \left(\boxed{(33)}\, a - \boxed{(34)}\, \sqrt{b}\right)x, \quad y = \left(\boxed{(35)}\, a + \boxed{(36)}\, \sqrt{b}\right)x$$

である．これら 2 本の接線と放物線 $y = x^2 + ax + b$ とで囲まれた図形の面積 S を求めると

$$S = \frac{\boxed{(37)}}{\boxed{(38)}}\, b\sqrt{b}$$

となる．

［３］　$\cos 72^\circ$ を求めたい．

$$z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ \quad (i \text{ は虚数単位})$$

とおく．$z^n = 1$ をみたす最小の自然数 n は $\boxed{(39)\ (40)}$ なので，z は方程式

$$z^4 + \boxed{(41)\ (42)}\, z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

の解となる．そこで $w = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと，w は方程式

$$w^2 + \boxed{(43)\ (44)}\, w + \boxed{(45)\ (46)} = 0$$

の解となり，$\dfrac{1}{z} = \cos 72^\circ - i \sin 72^\circ$ および $\cos 72^\circ > 0$ であることから

$$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{\boxed{(47)}} - \boxed{(48)}}{\boxed{(49)}}$$

を得る．

［４］　１個のさいころを３回振り，k 回目（$k=1, 2, 3$）に出た目の数を N_k とする．

$$z_k = \cos(60^\circ \times N_k) + i \sin(60^\circ \times N_k),\quad k = 1, 2, 3$$

とおき，z_1, z_2, z_3 を複素平面上の点として考える．

（１）　z_1, z_2, z_3 が三角形の相異なる３頂点となる確率は $\dfrac{\boxed{(50)}\boxed{(51)}}{\boxed{(52)}\boxed{(53)}}$ である．

（２）　z_1, z_2, z_3 が三角形の相異なる３頂点となるという条件のもとで，z_1, z_2, z_3 が正三角形の相異なる３頂点となる確率は $\dfrac{\boxed{(54)}\boxed{(55)}}{\boxed{(56)}\boxed{(57)}}$ である．

［５］ １枚の硬貨を表を上にして置く．ここで「１個のさいころを振り，1, 2, 3, 4, 5 のいずれかの目が出れば硬貨を裏返し，６の目が出れば硬貨をそのままにする」という試行を何回か繰り返す．すべての試行を終えたとき，硬貨の表が上であれば１点，裏が上であれば -1 点が得点となるものとしよう．

（１） この試行を３回で終えたときの得点の期待値を求めよ．

（２） この試行を n 回で終えたときの得点の期待値を n の式で表わせ．ただし，結果に至る経過も述べよ．

［6］ n を自然数とするとき，$(3+\sqrt{7})^n$ はある自然数 a_n, b_n をもちいて

$$(3+\sqrt{7})^n = a_n + b_n\sqrt{7}$$

と表わせる.

（1） a_n, b_n をもちいて，a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ表わせ.

（2） 数学的帰納法によって，自然数 n について

$$(3-\sqrt{7})^n = a_n - b_n\sqrt{7}$$

となることを証明せよ.

（3） $(3+\sqrt{7})^n$ 以下の最大の整数は $2a_n-1$ であることを証明せよ.

［7］　次の 2 つの命題 $[P]$, $[Q]$ を考える．ただし a, b は実数とする．

$[P]$ 未知数を x, y とする連立方程式

$$\begin{cases} ax+y=0 \\ x+by=0 \end{cases}$$

において，$x=y=0$ 以外の解で，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ をみたすものがある．

$[Q]$ ベクトル $\vec{k}=(a, 1)$, $\vec{h}=(1, b)$ について

$$\vec{k}\cdot\vec{q}>0 \text{ かつ } \vec{h}\cdot\vec{q}>0$$

となるベクトル $\vec{q}=(x, y)$ がある．

（1）　命題 $[P]$ が真となる点 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面に図示せよ．ただし，理由も示せ．

（2）　命題 $[\overline{Q}]$ が真となる点 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面に図示せよ．ただし，理由も示せ．なお $[\overline{Q}]$ は命題 $[Q]$ の否定である．

（3）　命題 $[P]$ と $[Q]$ の関係を述べよ．