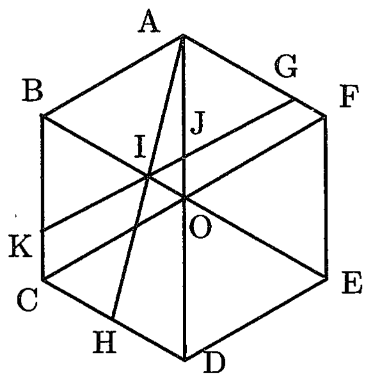
[1] 各辺の長さが1である正六角形ABCDEFとその中心Oを考えます．点Gは辺AFを4：1に内分する点で，点Hは辺CDの中点です．線分AHと線分BEの交点をIとして，線分GIと線分ADの交点をJ，線分GIの延長と辺BCの交点をKとします．

以下 $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\vec{\alpha}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{\beta}$ とします．



$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}\boxed{(4)}}\vec{\alpha}+\frac{\boxed{(5)}\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}\boxed{(8)}}\vec{\beta}$$

から

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{\boxed{(9)}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}\vec{\alpha}+\frac{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}\vec{\beta}$$

がわかります．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\frac{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}\vec{\alpha}$$

も示せます．以上から

$$\mathrm{OJ}=\frac{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}\boxed{(24)}},\quad \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{BI}}=\frac{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}$$

がしたがい，

$$\mathrm{BK}=\frac{\boxed{(29)}\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}$$

を得ることができます．

[2]　初項 a，公差 17 の等差数列

$$a,\ a+17,\ a+34,\ a+51,\cdots$$

を考えます．初項 a は 0 以上の整数とします．この等差数列において値が 1000 以下の項の和を $S(a)$ とします．$S(a)$ は $a=$ $\boxed{(33)}\boxed{(34)}$ で最大となり，そのとき $S(a)$ の値は

$$\boxed{(35)}\boxed{(36)}\boxed{(37)}\boxed{(38)}\boxed{(39)}$$

です．

[3] 赤い箱に赤玉が4個，白玉が2個入っています．白い箱には，赤玉が2個，白玉が4個入っています．第1回目の試行では，赤い箱から玉を1個取り出して，赤い箱に戻します．この第1回目の試行で赤玉を取り出した場合は，第2回目の試行で赤い箱から玉を1個取り出して赤い箱に戻します．また，第1回目の試行で白玉を取り出した場合は，第2回目の試行で白い箱から玉を1個取り出して白い箱に戻します．以下，同様の試行を繰り返します．すなわち，第n回目の試行で赤玉を取り出した場合には，第$n+1$回目の試行で赤い箱から玉を1個取り出して赤い箱に戻し，第n回目の試行で白玉を取り出した場合には，第$n+1$回目の試行で白い箱から玉を1個取り出して白い箱に戻します．

第n回目の試行で赤が出る確率をP_nとするとき，P_nに関する漸化式

$$P_{n+1} = \frac{\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}} P_n + \frac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}}$$

が成立します．このことから

$$P_n = \frac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}} + \frac{1}{\boxed{(46)}} \times \left(\frac{\boxed{(47)}}{\boxed{(48)}} \right)^n$$

であることがわかります．そして，第1回目から第n回目までに赤玉が取り出される回数の期待値は

$$\frac{\boxed{(49)}}{\boxed{(50)}} \times n + \frac{1}{\boxed{(51)}} \times \left\{ \boxed{(52)} - \left(\frac{\boxed{(53)}}{\boxed{(54)}} \right)^n \right\}$$

となります．

[4] (1) a, b, c, d は正数とします．このとき

$$ab \geqq 1 \text{ かつ } cd \geqq 1$$

ならば

$$ad + bc \geqq 2$$

であることを証明してください．

(2) 座標平面の部分集合 C が凸であるとは，C の相異なる 2 点 P と Q に対して線分 PQ が C に含まれることです．

$$D = \{(x, y) |\ x > 0,\ xy \geqq 1\}$$

が凸であることを証明してください．

[5]　点 A(1,2) を通る傾き a の直線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とするとき，その最小値を求めてください．

[6] 定数 a に対して関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 6ax^2 + 9a^2x - 4$$

と定めます.

(1) 「$f(1) \geqq 0$ である」ことの必要十分条件を a について求めてください.

(2) 「$x \geqq 1$ ならば $f(x) \geqq 0$ である」ことの必要十分条件を a について求めてください.