[1]　**(1)** 4個のサイコロを同時にふるとき，4個のサイコロの目がすべて5以上になる確率は

$$\frac{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}\boxed{(4)}}$$

となります．

(2) 4個のサイコロを同時にふる試行を n 回繰り返します．n 回のうち少なくとも1回は4個のサイコロの目がすべて5以上になる事象をPとします．事象Pが起こる確率は

$$1-\left(\frac{\boxed{(5)}\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}\boxed{(8)}}\right)^n$$

となります．

(3) (2) で定義した事象Pが起こるときは得点が2点，起こらないときは得点が (-1) 点であるとします．得点の期待値が正となるための必要十分条件は

$$n \geqq \boxed{(9)}\boxed{(10)}$$

で与えられます．ただし，

$$\log_{10} 3 = 0.4771, \quad \log_{10} 2 = 0.3010$$

として計算してください．

[2] $\triangle$ABC において

$$\mathrm{AB}=2,\ \mathrm{BC}=4,\ \mathrm{CA}=3$$

とします．ベクトル$\vec{b}$, $\vec{c}$を

$$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

によって定めます．

(1) ベクトル$\vec{b}$と$\vec{c}$の内積は

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}$$

となります．

(2) 以下 $\triangle$ABC の内心を D とします．内心 D が $\angle$A の 2 等分線上にあることから，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は

$$\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{\boxed{(15)}}\vec{c}$$

の実数倍になります．このことを用いると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}\vec{b}+\frac{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}{\boxed{(22)}\boxed{(23)}}\vec{c}$$

であることがわかります．

(3) 内心 D から辺 AB に下ろした垂線の足を H とします．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}\boxed{(27)}}\vec{b}$$

であることがわかります．

(4) $\triangle$ABC の内接円の半径は

$$\frac{\sqrt{\boxed{(28)}\boxed{(29)}}}{\boxed{(30)}}$$

となります．

[3] 漸化式

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

と初項 x_0 で定まる数列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$$

について考えます．ただし，初項 x_0 は

$$0 < x_0 \leqq 1$$

を満たすとします．

(1) 条件

$$x_n = x_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するとき，初項 x_0 は

$$x_0 = \frac{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}$$

であることがわかります．

(2) 条件

$$x_{2n} = x_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \text{かつ} \quad x_{2n-1} \neq x_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するとき，初項 x_0 は

$$x_0 = \frac{\boxed{(35)}\boxed{(36)} \pm \sqrt{\boxed{(37)}\boxed{(38)}}}{\boxed{(39)}}$$

であることがわかります．

[4]　**(1)** $(a+1)^5$ の展開式を求めてください.

(2) (1) を用いて，6^5-1 は 5^2 の倍数であることを示してください.

(3) 任意の自然数 n に対して，

「$6^{5^n}-1$ は 5^{n+1} の倍数である」

が成立することを数学的帰納法を用いて証明してください.

[5]　2次関数

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

は

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

を満たすとします.

(1) 2次方程式 $f(x) = 0$ が異なる2実根を持つことを示してください.

(2) 2次方程式 $f(x) = 0$ の2根を α, β とします. $|\alpha - \beta|$ のとり得る値の範囲を求めてください.

[6] **(1)** 実数全体を定義域とする関数 $F(x)$ と $G(x)$ をそれぞれ

$$F(x) = 4 - |x-2|, \qquad G(x) = |x| - |x+4|$$

によって定義します．グラフ $y = F(x)$ と $y = G(x)$ を同じ座標平面に図示してください．

(2) (1) で与えた 2 つの関数を用いて座標平面の部分集合

$$D_1 = \{(x, y) |\ y \leqq F(x)\}$$

$$D_2 = \{(x, y) |\ y \geqq G(x)\}$$

を定めます．そして D_1 と D_2 を用いて

$$D = D_1 \cap D_2$$

と定めます．D の点 (x, y) に対して，関数

$$f(x, y) = y^2 + 4x - 10y$$

を考えます．点 $\mathrm{P}(x, 0)$ が D を動くとき，$f(x, 0)$ の最小値を求めてください．

(3) 点 $\mathrm{P}(x, y)$ が D を動くとき，$f(x, y)$ の最小値を求めてください．