[1] a と b を実数とします．方程式

$$(*) \qquad x^3 + ax^2 + bx + a = 0$$

が $x = 1 + 2i$ （i は虚数単位）を解に持つとすれば，方程式 $(*)$ は実数解

$$x = \frac{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}\boxed{(4)}}$$

を持ち，

$$a = \frac{\boxed{(5)}\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}\boxed{(8)}}, \qquad b = \boxed{(9)}\boxed{(10)}$$

となります．このとき，複素数平面において方程式 $(*)$ の 3 つの解を頂点とする三角形の外接円の中心は

$$\frac{\boxed{(11)}\boxed{(12)}}{\boxed{(13)}\boxed{(14)}} + \boxed{(15)}\boxed{(16)}\,i$$

です．また，この外接円上の点 z は

$$z\bar{z} - \frac{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}\,z - \frac{\boxed{(21)}\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}\,\bar{z} + \frac{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}\boxed{(28)}} = 0$$

を満たします．ただし $\bar{z}$ は z の共役な複素数を表します．

[2] A さんと B さんが次の 3 つの規則 [ア], [イ], [ウ] に従ってゲームを行います.

[ア] 2 人がそれぞれ 1 枚の硬貨を 1 回投げます.

[イ] 両者で異なる面が出た場合には表を出した人が 1 点を獲得します.

[ウ] 両者で同じ面が出た場合には共に 0 点とします.

このゲームを 5 回繰り返し行い，先に 2 点を獲得した人を勝者とします. 5 回以内で勝者が決まらなかった場合には引き分けとします.

(1) ちょうど 3 回目で A さんが勝者となる確率は

$$\frac{\boxed{(29)}\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}\boxed{(32)}}$$

です.

(2) 5 回以内で勝者が決まる確率は

$$\frac{\boxed{(33)}\boxed{(34)}}{\boxed{(35)}\boxed{(36)}}$$

です.

[3] a と b を実数とします．2次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

とし，$y = f(x)$ のグラフが次の条件 **[ア]**, **[イ]** を満たすものとします．

[ア] $y = f(x)$ のグラフと $y = 2x^2 + 1$ のグラフの共有点の個数は 1 以下である．

[イ] $y = f(x)$ のグラフの頂点は，不等式 $y \geqq x$ の表す領域に属する．

(1) $y = f(x)$ のグラフのうち，頂点の x 座標が最大となるのは

$$f(x) = x^2 + \boxed{(37)}\boxed{(38)}\,x + \frac{\boxed{(39)}\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}\boxed{(42)}}$$

のときです．

(2) $y = f(x)$ のグラフのうち，$f(0)$ が最小となるのは

$$f(x) = x^2 + \boxed{(43)}\boxed{(44)}\,x + \frac{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}{\boxed{(47)}\boxed{(48)}}$$

のときです．

(3) $y = f(x)$ のグラフのうち，頂点の y 座標が最小となるのは

$$f(x) = x^2 + \boxed{(49)}\boxed{(50)}\,x + \boxed{(51)}\boxed{(52)}$$

のときです．

[4] a と b を実数とし，3次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

とします.

(1) $f(x)$ が極大値と極小値の両方を持つための必要十分条件を a と b を用いて表してください.

(2) $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値をとり，$x = \beta$ で極小値をとるとします. $f(\alpha) - f(\beta)$ を a と b の簡単な式で表してください.

(3) $S = \{(a, b) \mid a \geqq -1$ かつ $b \leqq -1\}$ とします. (a, b) が S 内を動くとき，$f(\alpha) - f(\beta)$ の最小値を求めてください.

[5] 数列 $\{a_n\}$ が次の条件

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

を満たすとします.

(1) a_n を n を用いて表してください.

(2) $a_n < 10^{60}$ となるような自然数 n は全部で何個ありますか.

ただし，**(2)** では $\log_{10} 2 = 0.3010$ として計算してください.

[6] 日吉キャンパスと三田キャンパスをつなぐ長さ 20 km の道路があるとします．K 教授と O 教授は同時刻に日吉キャンパスを出発します．K 教授は自転車に乗って 10 km/時 の速さで三田キャンパスまで行きます．O 教授は次の 3 つの規則 [ア], [イ], [ウ] に従って日吉キャンパスと三田キャンパスを自動車で 1 回往復します．

[ア] 日吉キャンパスを出発して三田キャンパスに着いたら 1 時間三田キャンパスで仕事をして，その後日吉キャンパスへ帰ります．

[イ] 日吉キャンパスを出発して三田キャンパスでの 1 時間の仕事を含めてちょうど 2 時間後に日吉キャンパスに戻ります．

[ウ] 行きと帰りの速さは異なってもかまいませんが，行きの速さ，帰りの速さはそれぞれ一定で， 60 km/時 以下とします．

日吉キャンパスを出発してから t 時間後に K 教授は日吉キャンパスへ帰る O 教授とすれ違ったものとします．

(1) O 教授が日吉キャンパスを出発してから T 時間後に三田キャンパスに着くとして，t を T を用いて表してください．

(2) t のとりうる値の範囲を求めてください．