[1] 定数 a, b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_b^x (9t^2 - 16t + a)dt$$

によって定めます．方程式 $f(x) = 0$ が $x = 0$ と $x = 1$ を解にもつならば，a の値は

$$a = \boxed{(1)}$$

となり，b の値は小さい方から順に

$$b = \boxed{(2)} \text{ または } \boxed{(3)} \text{ または } \frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}}$$

となります．このとき，方程式 $f(x) = 0$ の $x = 0,\ 1$ 以外の解は

$$x = \frac{\boxed{(6)}}{\boxed{(7)}}$$

となります．

[2] 硬貨が 1 枚あります．この硬貨を投げたとき，表の出る確率と裏の出る確率は等しいとします．この硬貨を 6 回投げ，k 回目に表が出たとき $Y_k = 1$，裏が出たとき $Y_k = 0$ として $Y_k\ (k = 1, 2, \cdots, 6)$ を定義します．そして，O を原点とする座標平面上の点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_6$ を次のように決定していきます．まず，P_0 を O とします．次に，$\mathrm{P}_k\ (k = 1, 2, \cdots, 6)$ は，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_k = \overrightarrow{\mathrm{OP}}_{k-1} + (Y_k, 1 - Y_k)$$

によって定めます．

(1) $\mathrm{P}_6 \in \{(x, y) \mid x = y\}$ となる確率は

$$\frac{\boxed{(8)}\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}\boxed{(11)}}$$

となります．

(2) $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_6\} \subset \{(x, y) \mid x < y\}$ となる確率は

$$\frac{\boxed{(12)}\boxed{(13)}}{\boxed{(14)}\boxed{(15)}}$$

となります．

(3) 集合 $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_6\} \cap \{(x, y) \mid x = y\}$ が空集合にならない確率は

$$\frac{\boxed{(16)}\boxed{(17)}}{\boxed{(18)}\boxed{(19)}}$$

となります．

(4) 集合 $\{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_6\} \cap \{(x, y) \mid x = y\}$ の要素の個数の期待値は

$$\frac{\boxed{(20)}\boxed{(21)}}{\boxed{(22)}\boxed{(23)}}$$

となります．

[3] 空間内の異なる 4 点 O, A, B, C を考えます．O, A, B, C は同一平面上にはないとします．

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点を L，線分 BC の中点を M とします．直線 CL と直線 AM の交点を K とします．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = \frac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となります．

次に，点 P, Q, R を $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすようにとります．点 P, Q, R の定める平面と直線 OK の交点を S とします．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{\boxed{(30)}\boxed{(31)}}{\boxed{(32)}\boxed{(33)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{(34)}\boxed{(35)}}{\boxed{(36)}\boxed{(37)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{\boxed{(38)}\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}\boxed{(41)}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となります．

(2) 線分 OA, OB, OC の長さをそれぞれ 1, 2, 3 とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{2}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2$$

が成り立つとします．O から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を Z とします．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \frac{\boxed{(42)}}{\boxed{(43)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となります．さらに，点 X が 直線 OC 上を動き，点 Y が直線 AB 上を動くとき，線分 XY の長さが最小になるのは

$$\overrightarrow{\mathrm{XY}} = \frac{\boxed{(46)}}{\boxed{(47)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{\boxed{(50)}}{\boxed{(51)}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つときです．

[4]　定数 a を 0 でない実数とします．座標平面上の点 (x, y) に対して定義された関数

$$f(x, y) = ax^2 + 2(1-a)xy + 4ay^2$$

を考えます．

(1) y を定数として，すべての実数 x に対して定義された関数

$$g(x) = ax^2 + 2(1-a)xy + 4ay^2$$

を考えます．$g(x)$ の最小値が存在するための必要十分条件を求めてください．

(2) 座標平面上のすべての点 (x, y) に対して，不等式

$$f(x, y) \geqq 0$$

が成立するための必要十分条件を求めてください．

[5] 定数 k を整数として，x に関する不等式

$$(*) \qquad \log_6 x + \log_6(2^k + 3^k - x) > k$$

を考えます.

(1) 不等式 $(*)$ を満たす実数 x の範囲を定めてください.

(2) 不等式 $(*)$ を満たす整数 x の個数を $f(k)$ とします．$f(k)$ を求めてください.

(3) すべての整数 k に対して不等式 $f(k) \leqq f(k+1)$ が成立することを示してください. さらに，$f(k) = f(k+1)$ を満たす整数 k をすべて求めてください.

(4) 不等式 $0 < f(k+1) - f(k) < 2^{k+3}$ を満たす整数 k をすべて求めてください．ただし，必要ならば $\log_2 3 = 1.58$ として計算してください.

[6] 実数全体を定義域とする関数

$$f(x) = |x|^3 - 6|x|^2 + 11|x| - 6$$

を考えます.

(1) 座標平面上に $y = f(x)$ のグラフをかいてください.

(2) a を実数とするとき，$y = f(x)$ のグラフと $y = x^2 + a$ のグラフの共有点の個数を求めてください.