

[1] 座標平面上に点 $A(4, 3)$ と点 $B(8, 2)$, 直線 $l: y = x$ と直線 $m: y = 0$ が与えられている.

(1) 直線 l に関して点 A と対称な点を A' とし, 直線 m に関して点 B と対称な点を B' とする. A' と B' の座標はそれぞれ

$$A' \left(\boxed{(1)}, \boxed{(2)} \right), \quad B' \left(\boxed{(3)}, \boxed{(4)} \boxed{(5)} \right)$$

である.

(2) 点 P が直線 l 上を動くとき, 線分の長さの和 $AP + PB$ が最小となる P の座標は

$$P \left(\frac{\boxed{(6)} \boxed{(7)}}{\boxed{(8)} \boxed{(9)}}, \frac{\boxed{(10)} \boxed{(11)}}{\boxed{(12)} \boxed{(13)}} \right)$$

である.

(3) 点 Q が直線 l 上を動き, 点 R が直線 m 上を動くとき, 線分の長さの和 $AQ + QR + RB$ が最小となる Q, R の座標はそれぞれ

$$Q \left(\frac{\boxed{(14)} \boxed{(15)}}{\boxed{(16)} \boxed{(17)}}, \frac{\boxed{(18)} \boxed{(19)}}{\boxed{(20)} \boxed{(21)}} \right),$$

$$R \left(\frac{\boxed{(22)} \boxed{(23)}}{\boxed{(24)} \boxed{(25)}}, 0 \right)$$

である.

[2] a を実数の定数とする. 区間 $1 \leq x \leq 4$ を定義域とする 2 つの関数

$$f(x) = ax, \quad g(x) = x^2 - 4x + 9$$

を考える. 以下の条件を満たすような a の範囲をそれぞれ求めよ.

(1) 定義域に属するすべての x に対して, $f(x) \geq g(x)$ が成り立つ.

このような a の範囲は $a \geq \frac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$ である.

(2) 定義域に属する x で, $f(x) \geq g(x)$ を満たすものがある.

このような a の範囲は $a \geq \frac{\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}}$ である.

(3) 定義域に属するすべての x_1 とすべての x_2 に対して, $f(x_1) \geq g(x_2)$ が成り立つ.

このような a の範囲は $a \geq \frac{\boxed{(30)}}{\boxed{(31)}}$ である.

(4) 定義域に属する x_1 と x_2 で, $f(x_1) \geq g(x_2)$ を満たすものがある.

このような a の範囲は $a \geq \frac{\boxed{(32)}}{\boxed{(33)}}$ である.

[3] 3次式 $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ で、各係数 a_k ($k = 0, 1, 2, 3$) が 1 または -1 となるものを考える。このような3次式の総数を N とする。

(1) 総数 N の値は

(34)	(35)
------	------

 である。また、このような3次式 $f(x)$ の係数の和 $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ がとりうる値は全部で

(36)	(37)
------	------

 通りある。

次に、これら N 個の3次式を1つずつ書いたカードを N 枚用意して箱に入れる。ただし、異なるカードには異なる3次式が書かれているものとする。この箱の中から3枚のカードを同時に取り出し、取り出されたカードに書かれている3次式を $f(x), g(x), h(x)$ とする。

(2) $f(x) + g(x) + h(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$ として、その係数の和 $b_0 + b_1 + b_2 + b_3$ を S で表す。 S がとりうる値の最大値は

(38)	(39)
------	------

 である。また S が最大値をとる確率は

$$\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (40) & (41) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline (42) & (43) & (44) \\ \hline \end{array}}$$

である。

(3) $f(x)g(x)h(x) = c_0x^9 + c_1x^8 + \dots + c_8x + c_9$ として、その係数の和 $c_0 + c_1 + \dots + c_8 + c_9$ を T で表す。 $T = 0$ となる確率は

$$\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline (45) & (46) \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline (47) & (48) \\ \hline \end{array}}$$

である。

[4] a, b は実数の定数で $a \geq 0, b > 0$ を満たすとする. x についての 2 次方程式

$$(*) \quad x^2 - (2a \log_{10} 2)x + (\log_{10} b)^2 = 0$$

を考える.

(1) $a = 3$ のとき, 方程式 (*) が実数解をもたないような b の値の範囲を求めよ.

(2) 方程式 (*) が実数解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表し, その条件を満たす領域を ab 平面上に図示せよ.

[5] $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ を自然数全体の集合とする. 集合 S を

$$S = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N\}$$

と定める. S の2つの要素 $(a, b), (c, d)$ に対して, 次の条件P または Q が成り立つとき, $(a, b) \triangleleft (c, d)$ と表すことにする.

$$P: a + b < c + d,$$

$$Q: a + b = c + d \text{ かつ } a < c.$$

また S の要素 (m, n) に対して集合 $T(m, n)$ を

$$T(m, n) = \{(x, y) \mid (x, y) \in S, (x, y) \triangleleft (m, n)\}$$

と定める.

- (1) $T(2, 3)$ の要素をすべて書き並べよ.
- (2) $T(1, n)$ の要素の個数を n の式で表せ.
- (3) $T(2, n)$ の要素の個数を n の式で表せ.
- (4) S の要素 (x, y) に対して $w(x, y) = 2^x \cdot 2^y$ とおく. $T(2, n)$ のすべての要素 (x, y) に対する $w(x, y)$ の和を n の式で表せ.

[6] a, b を実数の定数とし, 2次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

とおく. 関数 $y = F(x)$ は $x = \alpha$ で極大になり, $x = \beta$ で極小になるものとする.

(1) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる2つの実数解をもつことを示せ.

(2) $F(\alpha) - F(\beta) = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ となることを示せ.

(3) α, β がさらに不等式 $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2$ を満たすとする. このとき $F(\alpha) - F(\beta)$ のとりうる値の範囲を求めよ.