2008年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数学

注意事項

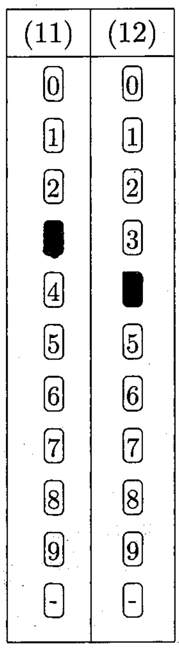
1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません.
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は 3，4，5，8，9，10 ページに印刷してあります．試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください.
3. 解答用紙は，解答用紙Ａ（マークシート）が１枚と，解答用紙Ｂが１枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙Ａ（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Ｂに解答してください.
4. 受験番号と氏名を，解答用紙Ａ（マークシート）および解答用紙Ｂのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙Ａ（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください.
5. 解答用紙Ａ（マークシート）への記入に先立って，解答用紙Ａ（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の２ページ目に記載された「解答用紙Ａ（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください.
6. 問題冊子の余白および 6，7，11，12 ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，１ページ目には何も書いてはいけません.
7. 解答用紙Ｂの余白および裏面には何も書いてはいけません.
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます.
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください.

解答用紙 A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の [1] から [3] の解答は，解答用紙 A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

[例]　$\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ と表示のある問いに対して，「34」と解答する場合は，右の例のように解答欄 (11) の $\boxed{3}$ と解答欄 (12) の $\boxed{4}$ にマークしてください．

なお，解答欄にある $\boxed{-}$ はマイナスの符号 $-$ を意味します．



2. 解答欄 (1), (2), $\cdots$, (46) の一つ一つは，それぞれ 0 から 9 までの数字，またはマイナスの符号 $-$ のいずれか一つに対応します．それらを (1), (2), $\cdots$, (46) で示された解答欄にマークしてください．

下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号 $-$ は左端に置いてください．空のマスがあれば 0 を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

[例]

$$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3}$$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$$

$$-x \longrightarrow (-1)x \longrightarrow \boxed{-}\boxed{1}\ x$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$$

[1] **(1)** ある自然数 n に対して 2^n は 22 桁で最高位の数字が 4 となります．

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \quad \log_{10} 3 = 0.4771$$

として計算すると，$n=$ $\boxed{(1)}\boxed{(2)}$ となります．また 2^n の末尾の数字は $\boxed{(3)}$ であることがわかります．

(2) 実数 m を定数とします．x と y に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ mx - y - 3m + 1 = 0 \end{cases}$$

が $x > 0$ かつ $y > 0$ である解をもつための必要十分条件は

$$\frac{\boxed{(4)}\boxed{(5)}}{\boxed{(6)}\boxed{(7)}} < m < \frac{\boxed{(8)}\boxed{(9)}}{\boxed{(10)}\boxed{(11)}}$$

です．

[2] $2n$ 個の変数 a_1, b_1, a_2, b_2, $\cdots$, a_n, b_n が 0 または 1 の値をとります．このとき

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$

が偶数となる場合の数を A_n，奇数となる場合の数を B_n とします．例えば $n = 1$ の場合は

$$(a_1, b_1) = (0,0),\ (0,1),\ (1,0)$$

の 3 通りの場合に a_1b_1 が偶数になりますから，$A_1 = 3$ です．同様に $B_1 = 1$ もわかります．A_n と B_n は A_{n-1} と B_{n-1} を用いて

$$\begin{cases} A_n = \boxed{(12)}\,A_{n-1} + \boxed{(13)}\,B_{n-1} \\ B_n = \boxed{(14)}\,A_{n-1} + \boxed{(15)}\,B_{n-1} \end{cases}$$

と表すことができます．ここで $A_n \pm B_n$ を考えると

$$A_n + B_n = \boxed{(16)} \times \boxed{(17)}^{\,n-1}, \quad A_n - B_n = \boxed{(18)} \times \boxed{(19)}^{\,n-1}$$

と求まります．このことから

$$A_n = \left(\boxed{(20)}^{\,n} + \boxed{(21)} \right) \times \boxed{(22)}^{\,n-1}$$

であることが従います．

[3] 座標空間の原点 O$(0,0,0)$ および 3 点 A$(1,3,2)$, B$(2,1,1)$, C$(-1,-1,2)$ を考えます.

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると $\sin^2\theta=\dfrac{\boxed{(23)}\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}\boxed{(26)}}$ となります. このことから $\triangle$OAB の面積を S とすると

$$S^2=\frac{\boxed{(27)}\boxed{(28)}}{\boxed{(29)}\boxed{(30)}}$$

と計算されます.

(2) ベクトル $\vec{v}=(1,\ \boxed{(31)},\ -\boxed{(32)})$ は

$$\vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{v}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

を満たします. さらに $\vec{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積が $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\boxed{(33)}\boxed{(34)}$ であることから, $\triangle$OAB を含む平面と点 C との距離 h は

$$h^2=\frac{\boxed{(35)}\boxed{(36)}}{\boxed{(37)}\boxed{(38)}}$$

を満たします. 以上から 4 点 O, A, B, C を頂点とする三角すいの体積 V は

$$V=\frac{\boxed{(39)}\boxed{(40)}}{\boxed{(41)}\boxed{(42)}}$$

と計算されます.

(3) 条件

$$3\alpha+\frac{1}{4}\beta+5\gamma\leqq 1,\ \alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0,\ \gamma\geqq 0$$

を満たす実数 α, β, γ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表される点 P の全体が作る立体を E とします. E の体積は V の $\dfrac{\boxed{(43)}\boxed{(44)}}{\boxed{(45)}\boxed{(46)}}$ 倍となります.

[4] 正数 a, b, x, y を考えます．$a+b=1$ ならば，すべての自然数 n に対して不等式

$$(ax+by)^n \leqq ax^n + by^n$$

が成立することを証明してください．

[5] 関数

$$y = x^3 + 1$$

のグラフを曲線 C とします．正数 $t > 0$ に対して C 上の点 $\mathrm{P}(t, t^3 + 1)$ を定め，P における C の接線 ℓ_1 と x 軸との交点を R とします．次に，C 上に P と異なる点 Q を，Q における C の接線 ℓ_2 が P を通るようにとります。そして ℓ_2 と x 軸との交点を S とします．

(1) $\triangle$PRS の面積を t で表しましょう．

(2) (1) で考えた $\triangle$PRS の面積の最小値を求めましょう．

[6] 関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_0^1 |x^2 - 2tx|dx$$

によって定義します.

(1) 実数 t で場合分けをして $F(t)$ を t の式で表しましょう.

(2) t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときの $F(t)$ の最大値と最小値を求めましょう.