2009年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数学

注意事項

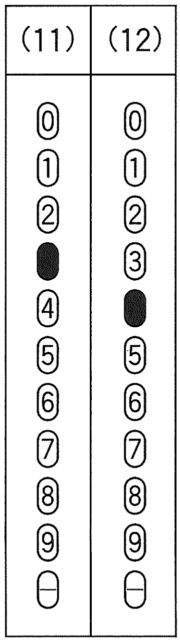
1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません．
2. 数学の問題冊子は全部で12ページです．問題は3，4，5，8，9，10ページに印刷してあります．試験開始の合図とともに全てのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください．
3. 解答用紙は，解答用紙A（マークシート）が1枚と，解答用紙Bが1枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙A（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Bに解答してください．
4. 受験番号と氏名を，解答用紙A（マークシート）および解答用紙Bのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙A（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください．
5. 解答用紙A（マークシート）への記入に先立って，解答用紙A（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の2ページ目に記載された「解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください．
6. 問題冊子の余白および6，7，11，12ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，1ページ目には何も書いてはいけません．
7. 解答用紙Bの余白および裏面には何も書いてはいけません．
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます．
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください．

解答用紙A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の［1］から［3］の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

［例］ $\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ と表示のある問いに対して，「34」と解答する場合は，右の例のように解答欄（11）の ③ と解答欄（12）の ④ にマークしてください．

なお，解答欄にある ⊖ はマイナスの符号－を意味します．



2. 解答欄（1），（2），… の一つ一つは，それぞれ0から9までの数字，またはマイナスの符号－のいずれか一つに対応します．それらを（1），（2），… で示された解答欄にマークしてください．

下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号－は左端に置いてください．空のマスがあれば0を補ってください．解答が分数のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

［例］

$$3 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{3} \qquad\qquad 0 \longrightarrow \boxed{0}\boxed{0}$$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{1}}$$

$$-x \longrightarrow (-1)x \longrightarrow \boxed{-}\boxed{1}\,x$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}$$

[1] $f(x)=x^2+3$ とし，点 $(0,\ f(0))$ を通り傾きが a である直線の方程式を $y=g(x)$ とする．

$$I(a)=3\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,dx$$

とおく．

(1) 区間 $a \leqq -1$ における $I(a)$ の最小値は $\boxed{(1)}\boxed{(2)}$ である．

(2) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき $I(a)=\boxed{(3)}\boxed{(4)}\,a^3+\boxed{(5)}\boxed{(6)}\,a+\boxed{(7)}\boxed{(8)}$ で，

この区間における $I(a)$ の最小値は $\boxed{(9)}\boxed{(10)}$，最大値は $\boxed{(11)}\boxed{(12)}$ である．

[2] 袋の中に赤玉 2 個と白玉 2 個が入っている．この袋から 2 個の玉を同時に取り出し，色を調べてから袋に戻す．以下では，これを試行という． n を自然数とする．次のルール (A), (B), (C) に従って試行を繰り返すゲーム G_n を行い，得点を決める．

(A) 取り出した 2 個の玉の色が異なる場合には試行を繰り返す．ただし，n 回試行を行った場合には繰り返さず，ゲームを終了する．

(B) 取り出した 2 個の玉の色が同じ場合にはゲームを終了する．

(C) k 回試行を行いゲームが終了した場合に得点を 2^k とする．

従って最低得点は 2，最高得点は 2^n である．以下では，$\log_2 3 = 1.585$, $\log_2 5 = 2.322$ として計算せよ．

(1) $n = 5$ のとき，すなわちゲーム G_5 において，得点が 2^3 となる確率は $\dfrac{\boxed{(13)}\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}\boxed{(16)}}$，得点が 2^5 となる確率は $\dfrac{\boxed{(17)}\boxed{(18)}}{\boxed{(19)}\boxed{(20)}}$ である．

(2) ゲーム G_n において，得点が 2^{n-1} 以下となる確率が 0.99 以上になるための必要十分条件は $n \geqq \boxed{(21)}\boxed{(22)}$ である．

(3) ゲーム G_n における得点の期待値は $\boxed{(23)}\boxed{(24)}\left(\dfrac{\boxed{(25)}}{\boxed{(26)}}\right)^n + \boxed{(27)}\boxed{(28)}$ である．

[3] 座標平面上で，３点 O(0, 0), A(4, 3), B(2, 5) を頂点とする３角形 OAB について考える．

３角形 OAB の面積は $\boxed{(29)}$ である．また，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ により定まる点 D の座標は

$$\left(\boxed{(30)}\boxed{(31)}\,,\ \boxed{(32)}\boxed{(33)}\right),$$

点 O に関して，点 A と対称である点の座標は

$$\left(\boxed{(34)}\boxed{(35)}\,,\ \boxed{(36)}\boxed{(37)}\right),$$

点 O に関して，点 B と対称である点の座標は

$$\left(\boxed{(38)}\boxed{(39)}\,,\ \boxed{(40)}\boxed{(41)}\right)$$

である．

以下では，n 角形 $(n = 3, 4, 5, \cdots)$ はその周および内部からなるものとする．３角形 OAB の点 E, F (E と F は同じ点でもよい) を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OE}} + \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ の形に表すことのできる点 P 全体の集合を S，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ の形に表すことのできる点 Q 全体の集合を T とする．

このとき，S は面積が $\boxed{(42)}\boxed{(43)}$ である $\boxed{(44)}$ 角形をなし，T は面積が $\boxed{(45)}\boxed{(46)}$ である $\boxed{(47)}$ 角形をなす．

計 算 用 紙

計 算 用 紙

[4] a は定数とする．以下において，割り算は x についての整式とみて行うものとする．

(1) A, B は x についての整式とし，A を x^2-a で割ると余りが $x+1$，B を x^2-a で割ると余りが x であるとする．AB を x^2-a で割ったときの余りを求めよ．

(2) x^{150} を $x-a$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) x^{150} を x^2-a で割ったときの余りを求めよ．

(4) x^{151} を x^2-a で割ったときの余りを求めよ．

(5) x^{151} を x^5-a で割ったときの余りを求めよ．

[5] 座標平面上で，不等式

$$3(\log_2 x - 1) \leqq \log_2 y - 1 \leqq 2(\log_2 x - 1)$$

をみたす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を D とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が D 内を動くとき， $x+y$ の最大値を求めよ．

(3) 点 $(x,\ y)$ が D 内を動くとき， $x-y$ の最大値を求めよ．

[6] k は 0 でない実数とする．座標平面上で，不等式 $x^2 + y^2 < k^2$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を A，不等式 $y \geqq \dfrac{1}{2}x^2 - 2k$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を B とする．

(1) $A \cap B = \phi$ となるような k の値の範囲を求めよ．ただし，ϕ は空集合を表す．

(2) $A \subset B$ となるような k の値の範囲を求めよ．

計 算 用 紙

計　算　用　紙