

[1] $f(x)$, $g(x)$ を x の整式とする. これらが

$$f(x) = 2x + \int_0^1 g(t)dt$$

$$g(x) = x^2 \int_0^1 f(t)dt + 2$$

を満たすとき,

$$f(x) = \boxed{(1)}x + \frac{\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}}$$

$$g(x) = \frac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)}}x^2 + \boxed{(6)}x + \boxed{(7)}$$

となる. さらに,

$$\int_{-1}^2 \{f(t) + 2g(t)\}dt = \frac{\boxed{(8)}\boxed{(9)}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}$$

$$\int_0^2 f(t)g'(t)dt = \boxed{(12)}\boxed{(13)}\boxed{(14)}$$

である.

- [2] 三角形 OAB において、辺 OA を 1:4 に内分する点を D、辺 OB を 3:1 に内分する点を E とする。また、2つの線分 AE と BD の交点を P として、直線 OP が辺 AB と交わる点を F とする。このとき、

$$\vec{OP} = \frac{\boxed{(15)} \boxed{(16)}}{\boxed{(17)} \boxed{(18)}} \vec{OA} + \frac{\boxed{(19)} \boxed{(20)}}{\boxed{(21)} \boxed{(22)}} \vec{OB}$$

と表される。また三角形 OAF の面積を S_1 とし、三角形 OFB の面積を S_2 とするとき

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\boxed{(23)} \boxed{(24)}}{\boxed{(25)} \boxed{(26)}}$$

である。さらに三角形 POA の面積を S_3 とし、三角形 PFB の面積を S_4 とするとき

$$\frac{S_4}{S_3} = \frac{\boxed{(27)} \boxed{(28)}}{\boxed{(29)} \boxed{(30)}}$$

である。

[3] 数列 $\{a_n\}$ は次の3つの条件

$$(A) a_1 = 1$$

$$(B) a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 8a_n^2 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(C) a_{n+1} > 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たしている。以下の文は $\{a_n\}$ の一般項を推測する記述である。

条件 (A) と、条件 (B) において $n = \boxed{(31)}$ とおいた式から、 a_2 は2次方程式

$$x^2 - \boxed{(32)}x + \boxed{(33)} = 0$$

の解の1つである。この方程式の解のうち小さいほうは $\boxed{(34)}$ 、大きいほうは $\boxed{(35)}$ である。これらの候補のうち条件 (C) において $n = 1$ とした式を満たすものを選ぶと、 $a_2 = \boxed{(36)}$ である。同様に、 $a_3 = \boxed{(37)}\boxed{(38)}$ 、 $a_4 = \boxed{(39)}\boxed{(40)}$ となるので、一般項は $a_n = \boxed{(41)}^{n-1}$ と推測される。

[4] t を実数の定数として, x の 3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2^t x^2 + (4^t - 4^{-t})x$$

を考える. $f(x)$ は $x = \alpha$ において極大値を, $x = \beta$ において極小値をとるとする.

(1) α, β を t のなるべく簡単な式で表せ.

(2) α, β が $\alpha\beta = 1$ を満たすとき

$$t = \frac{1}{2} \left\{ \log_2(\boxed{a}) + \sqrt{\boxed{b}} - \boxed{c} \right\}$$

である. (a), (b), (c) にあてはまる 1 桁の自然数を求めよ.

(3) α, β が $\beta - \alpha \geq 12$ を満たすときの t の値の範囲は

$$t \leq -\boxed{d} \log_2 \boxed{e} - 1$$

である. (d), (e) にあてはまる 1 桁の自然数を求めよ.

[5] 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = n^2 + 10n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与えられている.

- (1) $a_n \leq 100$ を満たすような最大の n と, このときの a_n の値を求めよ.
- (2) a_n が6桁の整数のうちで最大となるような a_n を求めよ. また, このときの n を求めよ.

[6] 金貨と銀貨が1枚ずつある。これらを同時に1回投げる試行を行ったとき、金貨が裏ならば0点、金貨が表で銀貨が裏ならば1点、金貨が表で銀貨も表ならば2点が与えられるとする。この試行を5回繰り返した後に得られる点数を X とする。

(1) $X = 1$ となる確率を求めよ。

(2) $X = 3$ となる確率を求めよ。

(3) X が偶数となる確率を求めよ。ただし、0は偶数とする。