近 畿 大 学
医 学 部

（一般前期）
平 成 2 3 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学

注 意 事 項

1．問題は、指示があるまで開かない。

2．解答は必ず別に配布する解答用紙に記入すること。

（前期）　平成23年度入学試験　　数　学（問題用紙）

◎ 問題は3問です。解答はすべて解答用紙に記入すること。

1 座標平面上の２つの円を

$$\mathrm{O}_1 : x^2 + y^2 = 4r^2 \quad , \quad \mathrm{O}_2 : (x-a)^2 + y^2 = r^2$$

とする。ただし，r は正の定数であり，a は正の値をとって変化する値である。

(1)　２円 $\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_2$ が異なる２点で交わる場合を考える。このとき，２交点のうち第１象限にある交点をＰとすると

i)　a がとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < a < \boxed{\text{イ}}$ であり，点Ｐの x 座標は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

ii)　点Ｐの y 座標が最大になるのは $a = \boxed{\text{エ}}$ のときであり，そのときの点Ｐの y 座標は $\boxed{\text{オ}}$ である。

また，このとき，２円 $\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_2$ の共通部分の面積は $\left(\boxed{\text{カ}}\pi - \boxed{\text{キ}}\right)r^2$ である。

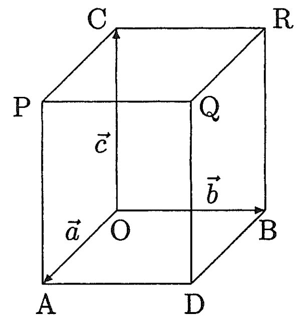
(2)　２円 $\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_2$ が外接する場合を考える。このとき，２円 $\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_2$ の共通接線のうち，２円 $\mathrm{O}_1,\mathrm{O}_2$ との接点がともに第１象限にある共通接線を ℓ とすると

ℓ が x 軸と交わる点の x 座標は $\boxed{\text{ク}}$ であり，ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{ケ}}\,x + \boxed{\text{コ}}$ である。

2 Ｏを原点とする座標空間内に，図のような直方体 OADB−CPQR がある。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とおく。また，３点 A,B,C を頂点とする △ABC の重心をＧとする。



(1)　線分 DP を $1:5$ に内分する点をＭとし，２点 M,G を通る直線と面 OBRC の交点をＮとする。このとき

i)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ を，それぞれ，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

ii)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ を満たす s の値を求めよ。

iii)　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　線分 OC を $t : 1-t$ に内分する点をＬとする（$0<t<1$）。このとき

i)　$\overrightarrow{\mathrm{LD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{LG}}$ を，それぞれ，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と t を用いて表せ。

ii)　３点 D,G,L が一直線上にあるように t の値を定めよ。

3 $0 \leqq a \leqq 2$ をみたす実数 a に対して，x の関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a$ とし，区間 $0 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を $S(a) = \displaystyle\int_0^4 |f(x)|\,dx$ とする。

(1)　$f(x)$ を因数分解して，$f(x)=0$ をみたす x の値を求めよ。

(2)　$f(x)=0$ が区間 $0<x<4$ において異なる２つの解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつとき

$$\int_0^4 |f(x)|\,dx = F(4) - F(0) + 2\{F(\alpha) - F(\beta)\} = F(4) - F(0) + \frac{(\beta-\alpha)^3}{3}$$

がなりたつことを示せ。ただし，$F(x)$ は関数 $f(x)$ の原始関数（不定積分）である。

(3)　$0<a<1$ のとき，$S(a)$ を求めよ。また，$1<a<2$ のとき，$S(a)$ を求めよ。

(4)　a が区間 $0 \leqq a \leqq 2$ の値をとって変化するとき，$S(a)$ は区間 $0<a<1$ では単調に減少し，区間 $1<a<2$ では単調に増加することを示せ。また，$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。