

1. $i = \sqrt{-1}$ とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 実数 α, β について, 等式

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 自然数 n に対して,

$$z = \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$$

とおくとき, 等式

$$z \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

が成り立つことを示せ.

(3) 2 以上の自然数 n について, 等式

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つことを示せ.

2. 以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) t を正の実数とするとき、 $|x| + |y| = t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) a を $a \geq 0$ をみたす実数とする。 x, y が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2 - a)y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

をみたすとき、 $|x| + |y|$ のとりうる値の最小値 m を、 a を用いた式で表せ。

(3) a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき、(2) で求めた m の最大値を求めよ。

3. n を 2 以上の自然数として,

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k}$$

とおく. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x}$ を求めよ.

(2) k を 2 以上の自然数とするとき,

$$\frac{1}{(k+1) \log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

を示せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ の値を求めよ.

4. a は正の無理数で, $X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$, $Y = a^2 - 2a$ を考えると, X と Y はともに有理数である. 以下の問に答えよ.

(配点30点)

- (1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ.
- (2) X と Y の値を求めよ.
- (3) a の値を求めよ. ただし, 素数の平方根は無理数であることを用いてよい.

5. 以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) $x \geq 1$ において, $x > 2 \log x$ が成り立つことを示せ. ただし, e を自然対数の底とするとき, $2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい.
- (2) 自然数 n に対して,

$$(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$$

が成り立つことを示せ.