〔1〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{13}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) $x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。

〔２〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 **14** の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) $x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値

$$\lim_{x \to \infty} x^2e^{-x}$$

を求めよ。

(3) k を定数とする。$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ。

〔3〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{\mathbf{15}}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

数列 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ は

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 - a_n^2}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

をみたしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $a_1 = \tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき，

$$a_{n+k} = a_n, \qquad n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

をみたす最小の自然数 k を求めよ。

〔４〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{16}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

空間内の４点

$$O(0,\ 0,\ 0),\ A(0,\ 2,\ 3),\ B(1,\ 0,\ 3),\ C(1,\ 2,\ 0)$$

を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　4 点 O，A，B，C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2)　3 点 A，B，C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3)　四面体 ABCD の体積を求めよ。

〔5〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{17}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) $n=2$ のとき，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶ確率を求めよ。

(2) $n=2$ のとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) $n=2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) $n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。