問　題　紙

1　(1)　関数 $y = x^3 - x^2$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y = x^3 - x^2$ の接線で，点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ。

(3)　p を定数とする。x の3次方程式 $x^3 - x^2 = p\left(x - \frac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

2　数字の2を書いた玉が1個，数字の1を書いた玉が3個，数字の0を書いた玉が4個あり，これら合計8個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて，この状態の袋から1度に1個ずつ玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さないものとする。

(1)　玉を2度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が2である確率を求めよ。

(2)　玉を4度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が4以下である確率を求めよ。

(3)　玉を8度取り出すとき，次の条件が満たされる確率を求めよ。

条件：すべての $n = 1$; 2，…，8に対して，1個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。

3　xy 平面上に3点O(0，0)，A(1，0)，B(0，1)がある。

(1)　$a > 0$ とする。OP：AP＝1：a を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(2)　$a > 1 > b > 0$ とする。OP：AP：BP＝1：a：b を満たす点Pが存在するための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または0）
2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の2点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分および外分する点：
   $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$
7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：
   $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$
9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベクトルと行列）

10. 2つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，$(ad-bc \fallingdotseq 0)$

（複　素　数）

12. 極形式表示：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$(r=|z|,\theta=\arg z)$

13. $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

14. ド・モアブルの公式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$に対し，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

15. $x^2+px+q=0$ の解が α，β のとき，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

16. $x^3+px^2+qx+r=0$ の解が α，β，γ のとき，$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$

（対　数）

17. $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

18. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

19. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

20. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

21. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$

22. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

23. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\left(\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

24. 初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和：$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)=\dfrac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)d\right\}$, $(l=a+(n-1)d)$

25. 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和：$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$(r\neq 1)$

26. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　　　　限）

27. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828\cdots\cdots$

28. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（微　　積　　分）

29. $\left\{f(g(x))\right\}'=f'(g(x))g'(x)$

30. $x=f(y)$ のとき $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

31. $x=x(t)$，$y=y(t)$ のとき $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$

32. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\frac{1}{x}$

33. $x=g(t)$ のとき $\int f(g(t))g'(t)dt=\int f(x)dx$

34. $\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$

35. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

36. $\int\log x\,dx=x\log x-x+C$

37. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2$　$(a>0)$，$\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}$　$(a\neq 0)$，$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

38. 回転体の体積：$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2dx$

39. 曲線の長さ：$\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x=x(t),\ y=y(t),\ a=x(\alpha),\ b=x(\beta))$

（順 列・組 合 せ）

40. ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$，$(1\leqq r\leqq n-1)$

41. $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r a^{n-r}b^r$

（確　　　　率）

42. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起る確率：$P_n(r)={}_nC_r p^r q^{n-r}$，$(q=1-p)$

43. 期待値：$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ をみたすとする。