問　題　紙

1 $-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに1回転してできる立体を K_s とする。

(1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2) s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに1回転してできる立体 L の体積を求めよ。

2 $A_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とする。整数 $n\geqq 1$ に対して，次の試行により行列 A_{n-1} から行列 A_n を定める。

「数字の組 $(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$ を1つずつ書いた4枚の札が入っている袋から1枚を取り出し，その札に書かれている数字の組が $(i,\ j)$ のとき，A_{n-1} の $(i,\ j)$ 成分に1を加えた行列を A_n とする。」

この試行を n 回 $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ くり返した後に，A_0，A_1，…，A_{n-1} が逆行列をもたず A_n は逆行列をもつ確率を p_n とする。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) $(n-1)$ 回 $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ の試行をくり返した後に，A_{n-1} の第1行の成分がいずれも正で第2行の成分はいずれも0である確率 q_{n-1} を求めよ。

(3) p_n $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を求めよ。

3 xy 平面上に3点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。

(1) $a>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(2) $a>0$，$b>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点Pが存在するための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

4 a，b は $a\geqq b>0$ を満たす整数とし，x と y の2次方程式

$$x^2+ax+b=0,\qquad y^2+by+a=0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1) $a=b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2) $a>b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または 0）
2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図 形 と 式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分および外分する点：

   $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$
7. 点$(x_1,\ y_1)$と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点$(x_1,\ y_1,\ z_1)$と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：

   $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点$(x_1,\ y_1)$における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$
9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点$(x_1,\ y_1)$における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベクトルと行列）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，$(ad-bc \neq 0)$

（複　素　数）

12. 極形式表示：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$(r=|z|, \theta=\arg z)$
13. $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$
14. ド・モアブルの公式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$に対し，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

15. $x^2+px+q=0$の解がα，βのとき，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$
16. $x^3+px^2+qx+r=0$の解がα，β，γのとき，$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$

（対　数）

17. $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

18. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
    $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
19. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
20. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
21. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$
    $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}$
    $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$
    $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$
22. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
    $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
    $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
    $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
23. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\left(\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

24. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)=\dfrac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)d\right\}$，$(l=a+(n-1)d)$
25. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$(r\neq 1)$
26. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
    $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　　　限）

27. $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots\cdots$

28. $\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

（微　積　分）

29. $\left\{f(g(x))\right\}' = f'(g(x))g'(x)$

30. $x = f(y)$のとき$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

31. $x = x(t)$，$y = y(t)$のとき$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

32. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)' = \frac{1}{x}$

33. $x = g(t)$のとき$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$

34. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

35. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

36. $\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

37. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2 \quad (a > 0)$，$\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \quad (a \neq 0)$，$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$

38. 回転体の体積：$V = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

39. 曲線の長さ：$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x = x(t),\ y = y(t),\ a = x(\alpha),\ b = x(\beta))$

（順列・組合せ）

40. ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$，$(1 \leqq r \leqq n-1)$

41. $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$

（確　　　率）

42. 確率pの事象がn回の試行中r回起る確率：$P_n(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$，$(q = 1 - p)$

43. 期待値：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$，ただし$p_i$は確率変数$X$が値$x_i$をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$をみたすとする。