数 学 (数学I・数学II・数学A・数学B)

1

空間内に点 $O(0,0,0)$ と点 $A(2,2,2)$ がある。点 P は O から出発し，一回につき x 軸，y 軸，z 軸いずれか一つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1) P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2) さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し，4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し，6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3) (2) と同じルールで，さいころを 6 回投げて P が点 $B(1,1,1)$ を通って A に到達する確率を求めよ。

2

数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている。

$$a_1 = 0$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ a_n + 1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_{10} を求めよ。

(2) n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4} を a_n で表せ。

(3) a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ。

3

平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。
この平面上の点 P が

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) P の軌跡が円となることを示せ。

(2) (1) の円の中心を C とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3) O との距離が最小となる (1) の円周上の点を $\mathrm{P_0}$ とする。A, B が条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + 5\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = 0$$

を満たすとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s, t の値を求めよ。

4

p を定数とする。

$$f(x) = x^3 + x^2 + px + 1$$

とおく。$y = f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。
このとき, 次の問いに答えよ。

(1) p の範囲を求めよ。

(2) 2 つの接点の x 座標を α, β とする。$(\alpha - \beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3) 2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき, 線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4) 2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。