

数学 (数学 I ・ 数学 II ・ 数学 III ・ 数学 A ・ 数学 B ・ 数学 C)

1

t を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) A の逆行列 A^{-1} が存在することを示せ。
- (2) $A + A^{-1}, A - A^{-1}, (A - A^{-1})^2$ を求めよ。
- (3) $A^{2n} - tA^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が n によらない行列になるという。このときの t の値を求めよ。

2

n を 3 以上の整数とする。 $3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

- (1) 3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。
- (2) 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。
- (3) 3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。

3

n を自然数とする。曲線 $y = x^2(1-x)^n$ ($0 \leq x \leq 1$) と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする。

- (1) S_n を求めよ。
- (2) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。

4

$f(x) = e^{-x^2}$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線を l 、原点 O を通り l に垂直な直線を l' とし、 l と l' との交点を P とする。

- (1) 線分 OP の長さを求めよ。
- (2) l と y 軸との交点を Q とし、 $\angle POQ$ を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。 $\sin \theta$ を a を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた $\sin \theta$ を最大にする a の値と、そのときの $\sin \theta$ の値を求めよ。