1 実数の組 (x, y, z) で，どのような整数 l, m, n に対しても，等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13\,l + 36\,m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

（配点率 30 %）

2 実数の組 (p,q) に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく．

(1) 放物線 $y=f(x)$ が点 $(0,1)$ を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 (p,q) と接点の座標を求めよ．

(2) 実数の組 (p_1,q_1), (p_2,q_2) に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく．実数 α,β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ．

(3) 長方形 R：$0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$ を考える．また，4点 $\mathrm{P}_0(0,1)$, $\mathrm{P}_1(0,0)$, $\mathrm{P}_2(1,1)$, $\mathrm{P}_3(1,0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする．実数の組 (p,q) を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする．R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．

（配点率 35 %）

3 a, b, c を実数とする．ベクトル $\vec{v}_1 = (3, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 2\sqrt{2})$ をとり，$\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ とおく．座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*) \qquad (\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\,\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\,\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\,\vec{v}_3 \ = \ c\vec{p}$$

を考える．ここで $\vec{v}_i \cdot \vec{p}$ $(i = 1, 2, 3)$ はベクトル $\vec{v}_i$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v} = (x, y)$ が，実数 s, t を用いて $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ と表されることを，s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ．

(2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が条件 $(*)$ をみたすならば，座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたすことを示せ．

(3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたす．このような実数の組 (a, b, c) をすべて求めよ．

（配点率 35 %）