1 aを自然数とする．Oを原点とする座標平面上で行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とする．

(1) $r > 0$ および $0 \leqq \theta < 2\pi$ を用いて $A = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ と表すとき，r, $\cos\theta$, $\sin\theta$ を a で表せ．

(2) 点 $\mathrm{Q}(1,0)$ に対し，点 Q_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}, \quad \mathrm{Q}_{n+1} = f(\mathrm{Q}_n)$$

で定める．$\triangle \mathrm{OQ}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ．

(3) f によって点 $(2,7)$ に移されるもとの点Pの x 座標の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が2であるという．自然数 a の値を求めよ．またこのとき $S(n) > 10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ．ただし $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いてよい．

（配点率 20 ％）

2 実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0, \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta, 0)$ を考える．θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分PQが通過する部分を D とする．D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

（配点率 20 ％）

3 実数の組 (p, q) に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく．

(1) 放物線 $y=f(x)$ が点 $(0,1)$ を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ．

(2) 実数の組 (p_1, q_1), (p_2, q_2) に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく．実数 α, β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ．

(3) 長方形 R : $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$ を考える．また，4点 $\mathrm{P}_0(0,1)$, $\mathrm{P}_1(0,0)$, $\mathrm{P}_2(1,1)$, $\mathrm{P}_3(1,0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする．実数の組 (p, q) を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする．R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．

（配点率 20 %）

4 a, b, c を正の定数とし，x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える．以下，定数はすべて実数とする．

(1) 定数 p, q に対し，次をみたす定数 r が存在することを示せ．

$$x \geqq 1 \text{ ならば } |px + q| \leqq rx$$

(2) 恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて，次をみたす定数 k，l が存在することを示せ．

$$x \geqq 1 \text{ ならば } \left|\sqrt[3]{f(x)} - x - k\right| \leqq \frac{l}{x}$$

(3) すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする．このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x+m)^3$ と表されることを示せ．

（配点率 20 %）

5 正数 r に対して，$a_1 = 0, a_2 = r$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める．

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1}) \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ，表がでたとき $r_n = \dfrac{r}{2}$，裏がでたとき $r_n = \dfrac{1}{2r}$ とする．ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする．a_n の期待値を p_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_3 および p_4 を，r を用いて表せ．

(2) $n \geqq 3$ のときに p_n を，n と r を用いて表せ．

(3) 数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ．

(4) r が (3) で求めた範囲を動くとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ の最小値を求めよ．

（配点率 20 %）