

数 学

次のⅠ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを、
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ $a > 0$ とする。行列

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ \text{ア} & \text{イ} \end{pmatrix}$$

は、 $A^2 = E$ を満たしている。ただし、 E は2次の単位行列である。

座標平面において、 P を、直線 $y = mx$ 上にある、原点と異なる1点とする。
行列 A の表す1次変換により、 P が直線 $y = mx$ 上の点に移されるのは、
 $m = \text{ウ}$ または $m = \text{エ}$ のときである。

直線 $y = \text{ウ}x$ と直線 $y = \text{エ}x$ が直交するのは、 $a = \text{オ}$ のときであり、このとき、行列 A の表す1次変換は、直線 $y = \text{カ}x$ に関する対称移動である。

II n を 2 以上の自然数とし, $x > 0$ で定義された関数

$$f(x) = \frac{1}{n-1} \{ (\log x)^n - \log x^n \}$$

を考える。

[1] n の値にかかわらず, $x = \boxed{\text{キ}}$ は方程式 $f(x) = 0$ の解である。方程式 $f(x) = 0$ のその他の解を n を用いて表すと, n が偶数のときは, $x = e^{\boxed{\text{ク}}}$ であり, n が奇数のときは, $x = e^{\boxed{\text{ク}}}$ と $x = e^{\boxed{\text{ケ}}}$ である。関数 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{コ}}$ で極小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。また, とくに n が奇数ならば, $x = \boxed{\text{シ}}$ で極大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

[2] n を奇数とする。座標平面において, 曲線 $y = f(x)$ の, 点 $(e^{\boxed{\text{ク}}}, 0)$ における接線と, 点 $(e^{\boxed{\text{ケ}}}, 0)$ における接線の交点は $(\boxed{\text{セ}}, \boxed{\text{ソ}})$ であり, 点 $(e^{\boxed{\text{ク}}}, 0)$ における法線と, 点 $(e^{\boxed{\text{ケ}}}, 0)$ における法線の交点の y 座標は $\boxed{\text{タ}}$ である。

Ⅲ $a > 0$ とする。座標平面において、点 $P(1, 3)$ から楕円

$$ax^2 + \frac{y^2}{2a} = 1$$

に引いた 2 本の接線の接点を Q, R とする。

Q, R はともに、直線 $\boxed{\text{チ}}$ $x + \boxed{\text{ツ}}$ $y = 1$ の上にある。線分 QR の中点を M とすると、 M の座標は $(\boxed{\text{テ}}, \boxed{\text{ト}})$ であり、 M は直線 $y = \boxed{\text{ナ}}$ x 上にある。線分 PQ の長さ と線分 PR の長さが等しくなるのは $a = \boxed{\text{ニ}}$ のときである。

O を原点とする。 $\triangle PQR$ の面積 S_1 と $\triangle OQR$ の面積 S_2 の比 $\frac{S_1}{S_2}$ を a を用いて表すと、

$$\frac{S_1}{S_2} = \boxed{\text{ヌ}}$$

である。 $a > 0$ の範囲で a を変化させると、比 $\frac{S_1}{S_2}$ は $a = \boxed{\text{ネ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ノ}}$ をとる。

IV n を 2 以上の自然数とする。1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 個の玉が袋の中にある。袋の中から 1 個の玉を取り出し、その数字を記録してから元に戻すという操作を n 回繰り返す。

[1] 記録された数の積 X が偶数である確率は である。 X が 2 でも 5 でも割り切れない確率は であり、 X が 10 で割り切れる確率は である。

[2] 記録され得る数字の並び方のうち、和が $9n - 2$ になるのは 通りある。

$n = 3$ のとき、記録され得る数字の並び方のうち、和が 25 以上になるのは 通りであり、記録された数の和が 24 以下である確率は である。