$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n 2^{6n^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) $b_n=\log_2 a_n$ とし，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) a_{10} の桁数を求めよ。ただし $\log_{10} 2=0.3010$ とする。

（配点 25 ％）

2 △ABC において, ∠A, ∠B, ∠C の大きさと対辺の長さをそれぞれ A, B, C および a, b, c で表す。次の問いに答えよ。

(1) $\sin\dfrac{B}{2}=\cos\dfrac{A+C}{2}$ および $\cos\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{A+C}{2}$ が成立することを示せ。

(2) $a+c=2b$ を満たすとき, $\sin A+\sin C=2\sin B$ が成立することを示せ。

(3) $a+c=2b$ を満たすとき, $\sin A+\sin C=2\sin\dfrac{A+C}{2}\cos\dfrac{A-C}{2}$ を用いて $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}$ の値を求めよ。

（配点 25 %）

3 実数 t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}$ の範囲を変化するとき, 2 つの曲線

$$C : y = -2x^2 + 3x, \quad C_t : y = |x^2 - 3tx|$$

で囲まれる図形の面積を $S(t)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 2 曲線 C, C_t の交点の x 座標をすべて求めよ。

(2) $S(t)$ を t の式で表せ。

(3) $S(t)$ を最大にする t の値を求めよ。

（配点 25 %）

4 A の袋には赤球 3 個と白球 2 個が, B の袋にも赤球 3 個と白球 2 個が入っている。A, B の袋から, それぞれ任意に 1 個の球を同時に取り出す。取り出した球は元に戻さず, これを 1 回の操作とする。この操作を 4 回繰り返すとき，次の問いに答えよ。

(1) 1 回目の操作で取り出された 2 個の球がともに赤球である確率を求めよ。

(2) 1 回目の操作で取り出された 2 個の球と 2 回目の操作で取り出された 2 個の球がすべて赤球である確率を求めよ。

(3) 初めて白球が取り出されるまでの球を取り出す操作の回数の期待値を求めよ。

（配点 25 ％）