黄金比と循環連分数

1　黄金比とフィボナッチ数列

黄金比　本稿の主題は連分数展開だが，本論に入る前にとても面白い性質をもった数を紹介する．それは

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．ϕ はギリシャ文字で，ファイあるいはフィーと読む．数学では空集合を表す記号としてお馴染みだが，混同しないように．比 $1 : \phi$ は**黄金比**と呼ばれている．

黄金比の起源は次のユークッリッドの問題だという：

[問題] ひとつの線分を二つに分割し，一方の長さと全体の長さで長方形を作り，他方の長さを一辺とする正方形と同じ面積にしたい．線分をどのような比に分ければよいか？

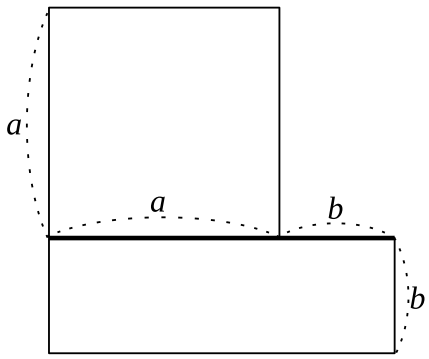


図 1　黄金比

[答え] 線分の長さを 1 として，それを $a : b$ に分けたとする．長方形の面積は $b(a+b)$ で正方形の面積は a^2 だから，$a^2 = b(a+b)$. 両辺を b^2 で割って，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1$$

だから a/b は $X^2 - X - 1 = 0$ の根である．$a/b > 0$ に注意してこの 2 次方程式を解くと

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

が得られる．よって $\phi : 1$ が答えである．□

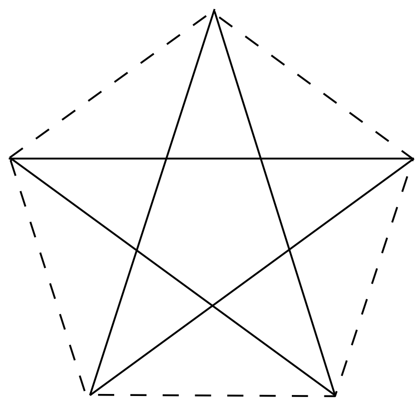


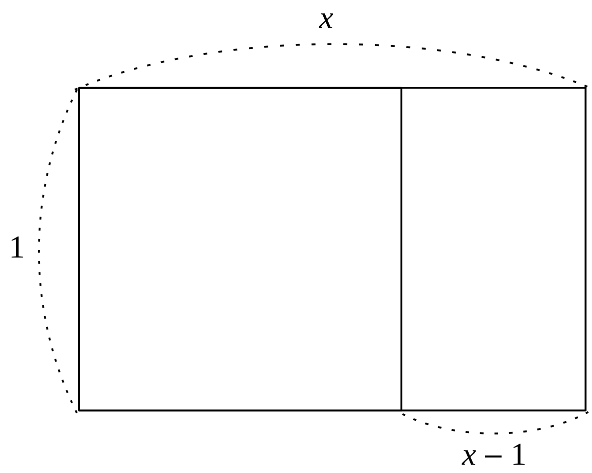
図 2　ペンタグラム

正 5 角形の頂点を結んで作られる星型「ペンタグラム」は，ピタゴラスの定理で有名なピタゴラス教団のシンボルマークだが，様々なところに黄金比が隠されている．例えば，星型を取り囲む正 5 角形の一辺の長さと対角線の長さの比は黄金比である．その他にもあるので探してみるとよい．

また，次のような問題にも黄金比が現れる．

[問題] 縦横の長さが違う長方形を考える．短いほうの辺を一辺とする正方形を，もとの長方形から取り除くと小さい長方形ができる．この小さな長方形がもとの長方形を一定比率で縮小したものになるようにしたい．長方形の短辺と長辺の長さの比をどのようにすれば良いだろうか？

[答え] もとの大きな長方形の短辺の長さを 1，長辺の長さを x とする．一辺の長さが 1 の正方形を取り除いてできた小さな長方形の縦横の長さは $x-1$ と 1 である．大きな長方形と小さな長方形が相似ならば，短辺と長辺の長さの比は同じでなければならない．もし小さな長方形の短辺が 1 で長辺が $x-1$ だとすると，$1 : x = 1 : x-1$ とならなければいけないので，不可能である．よって小さな長方形の短辺の長さは $x-1$ で，長辺の長さは 1 だから，$1 : x = x-1 : 1$，すなわち



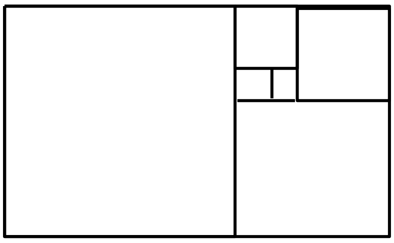
$$x^2 - x - 1 = 0$$

が成り立つ．この 2 次方程式を解くと

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

だが，x は辺の長さなので正である．よって，$x = \phi$ で，短辺：長辺 $= 1 : \phi$ である．□

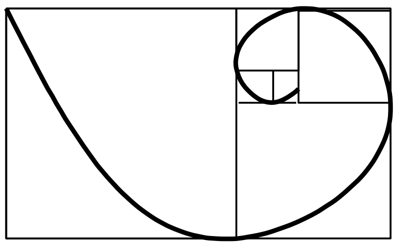
このように，短辺と長辺の長さの比が $1 : \phi$ の長方形を**黄金長方形**と呼ぶ．黄金長方形は最も美しくバランスのとれた長方形だと言われていて，古くから，絵画，彫刻，建築などに取り入れられている．例えば，パルテノン宮殿の縦横は黄金比らしい．クフ王のピラミッドには黄金比が沢山隠されているようである．また，ミロのビーナスも黄金比を取り入れて美しいバランスをもつようにされた (丁度「へそ」のところで黄金分割されているらしい)．名刺やテレフォンカード，最近では横長のハイビジョンテレビの画面が黄金長方形である．



上の問から，次のことが言える．黄金長方形があれば，一辺の長さが短辺と等しい正方形を取り除くと，また黄金長方形ができる．そこでまた，小さな黄金長方形から一辺の長さが短辺と等しい正方形を取り除くと，もっと小さな黄金長方形ができる．このような，一辺の長さが短辺と同じ正方形を取り除く操作は好きなだけ何度でも繰り返すことができるから，相似な黄金長方形が果てしなくできていく．また逆に，取り去るはずの正方形に着目するとそれら全部はもとの黄金長方形を埋め尽くす．

こうして得られた沢山の正方形の頂点を滑らかに結んでいくと，対数螺旋に似た曲線ができる．対数螺旋というのは，極座標で

$$r = ae^{b\theta}$$



と表される曲線のことで，その中心から外側に向かってどのような線分で切断しても相似な切り口が現れる，という特徴がある．対数螺旋は葛飾北斎の富嶽三十六景「神奈川沖浪裏」の豪快な波の描写に用いられているという．また，自然界には対数螺旋を体現している生物がいる．いわゆる渦巻貝である．その中でもオーム貝は特に美しい．自然は黄金比を好む．人間もそうであるように，多くの生物は少し成長しても全体としての形が変わらない様に，言い換えれば，自己相似形を極力保つように成長する．もっとも効率よくそれを実現しようとするとき，黄金長方形や対数螺旋が自然に関係してくるのかも知れない．

黄金長方形が示すように ϕ は「自己相似性」を内包した数であるが，不思議なことに，それは数としての表示にも具現化される．$\phi^2 - \phi - 1 = 0$ だから，$\phi = \sqrt{1+\phi}$ である．右辺の根号の中の ϕ にこの式を代入すると，$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\phi}}$ となる．もう一度代入する

と，$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\phi}}}$ である．代入を繰り返すと，

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}}$$

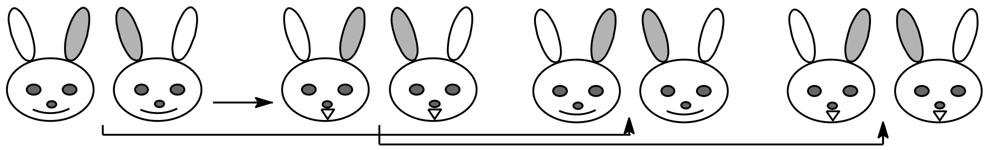
という表示が得られる．

フィボナッチ数列　斜塔で有名なピサ (イタリア) 生まれのフィボナッチ（レオナルド・ピサーノ，レオナルド・ダ・ピーサ）は，ヨーロッパにインド伝来ペルシャ経由の 0 を使った位取り記法を伝えた．フィボナッチが活躍した 12〜13 世紀頃は地中海貿易が盛んになり，商人の間で数学の知識は必須になっていたので，ペルシャ式位取り記法を用いた計算法は瞬く間に広まって，彼の名声を大いに高めた．よく知られているように，漸化式

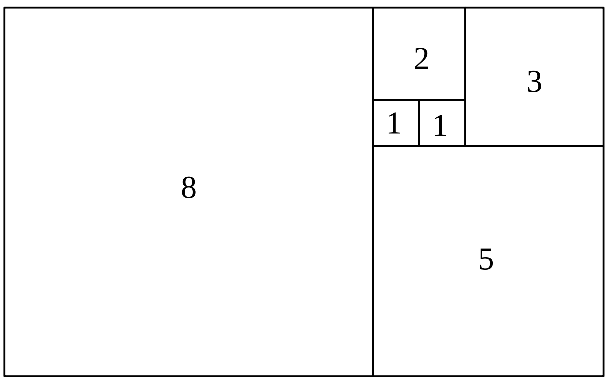
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = a_2 = 1$$

をみたす数列 $\{a_n\}$ を**フィボナッチ数列**という．1202 年にフィボナッチが出版した算盤書 (Liber Abaci) の中のクイズがもとのようだ：

[うさぎの問題]　生まれたばかりの 1 つがいのうさぎは 2 ヶ月目から毎月 1 つがいのうさぎを産むとする．すべてのうさぎがこの規則に従い，死ぬことはないとするとき，1 つがいのうさぎは 1 年後に何つがいのうさぎになるか？



フィボナッチ数列は次のように視覚化できる．



まず，一辺の長さ 1 の正方形を二つ並べて長方形を作る．左図では右上方の $\boxed{1}\boxed{1}$ の部分である．以降，左図のように長方形の長辺の長さを一辺とする正方形を次々と作っていく．このとき，正方形の一辺の長さを表す数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ がフィボナッチ数列に他ならない．

このようにしてみるとフィボナッチ数列と黄金長方形の類似が感じられる．実際，得られる長方形の縦横比は a_{n+1}/a_n で与えられるわけだが，その極限は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\phi$$

である．

[証明] $\phi^2=\phi+1$ に注意して $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を 2 通りに変形すると

$$a_{n+2}-\phi a_{n+1}=(1-\phi)(a_{n+1}-\phi a_n),\quad a_{n+2}-(1-\phi)a_{n+1}=\phi(a_{n+1}-(1-\phi)a_n)$$

である．従って $\{a_{n+1}-\phi a_n\}, \{a_{n+1}-(1-\phi)a_n\}$ はそれぞれ初項 $a_2-\phi a_1=1-\phi$, $a_2-(1-\phi)a_1=\phi$, 公比 $1-\phi$, ϕ の等比数列だから，一般項は

$$a_{n+1}-\phi a_n=(1-\phi)^n,\quad a_{n+1}-(1-\phi)a_n=\phi^n$$

で与えられる．これらから a_{n+1} を消去すると

$$a_n=\frac{\phi^n-(1-\phi)^n}{2\phi-1}=\frac{\phi^n-(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

が得られる．よって

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\phi^{n+1}-(1-\phi)^{n+1}}{\phi^n-(1-\phi)^n}=\frac{\phi}{1-(\frac{1-\phi}{\phi})^n}+\frac{1-\phi}{(\frac{\phi}{1-\phi})^n-1}$$

である．ここで，$\phi^2-\phi=1$ と $\phi>1$ であることを使えば

$$\left|\frac{1-\phi}{\phi}\right|=\left|\frac{1}{\phi^2}\right|<1$$

だから

$$\left(\frac{1-\phi}{\phi}\right)^n\to 0,\quad \left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)^n\to\infty\quad(n\to\infty)$$

となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\phi$$

であることがわかる．□

フィボナッチ数列は，もとになったうさぎの問題と同様に，細胞分裂や樹木の枝分かれの規則など，自然現象と深く関わっている．黄金比を近似しているからかも知れない．

2　連分数展開

小数を用いた実数の表示には小学校以来慣れ親しんでいるが，表示の仕方はそれだけではない．ここでは，連分数と呼ばれる実数の表示法を紹介する．

$\boxed{\text{連分数}}$　実数 x に対して，記号 $\lfloor x \rfloor$ によって x を超えない最大の整数を表す．$x = 3.76543$ ならば $\lfloor x \rfloor = 3$ であり，$x = -23.12$ ならば $\lfloor x \rfloor = -24$ である．差 $x - \lfloor x \rfloor$ は，$0 \leqq x - \lfloor x \rfloor < 1$ をみたす．$x > 0$ ならば $x - \lfloor x \rfloor$ は x の小数部分に他ならない．$a_0 = \lfloor x \rfloor$ とおく．もし $x - a_0 = x - \lfloor x \rfloor$ が 0 でなければ，その逆数をとり $x_1 = (x - a_0)^{-1}$ とおく．$0 < x - a_0 < 1$ だから $x_1 > 1$ であって

$$x = a_0 + (x - a_0) = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{x - a_0}} = a_0 + \frac{1}{x_1}$$

が成り立つ．次に $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ とおく．x_1 の小数部分 $x_1 - a_1$ が 0 でなければ，その逆数を $x_2 = (x_1 - a_1)^{-1}$ とおく．$x_1 = a_1 + 1/x_2$ なので，上の式に代入して

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}$$

が成り立つ．$0 < x_1 - a_1 < 1$ だから，$x_2 > 1$ である．以下，**整数部分と少数部分に分け，少数部分が 0 でなければ逆数をとる**，という操作を繰り返す．つまり x_k が決まったら，その整数部分を $a_k = \lfloor x_k \rfloor$ とおいて，小数部分 $x_k - a_k$ が 0 でなければ，その逆数を $x_{k+1} = (x_k - a_k)^{-1}$ とおいて代入する．もし x_k が整数なら，言い換えれば小数部分が 0 になったら，その時点で操作を終了する．この計算をどんどん続けていけば

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

となる．これを x の**連分数展開**という．省スペースのために $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ と書くこともある．a_0 は負かも知れない整数だが，a_1 以降の a_k はすべて自然数である．

例　$\sqrt{2}$ を連分数に展開する．まず $1 < \sqrt{2} < 2$ なので整数部分は $a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ で，小数部分は $\sqrt{2} - a_0 = \sqrt{2} - 1$ である．その逆数である x_1 は有理化を行って

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1^2} = \sqrt{2}+1$$

と計算できる．$2 < \sqrt{2}+1 < 3$ なので，x_1 の整数部分は $a_1 = \lfloor \sqrt{2}+1 \rfloor = 2$, 小数部分は $(\sqrt{2}+1) - 2 = \sqrt{2} - 1$ である．同じ数 $\sqrt{2} - 1$ が出てきたので，以下ずっと $x_k = \sqrt{2}+1$, $a_k = 2$ になることがわかる．従って $\sqrt{2}$ の連分数展開は,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$$

である．□

さて ϕ の連分数展開を考えてみよう．こっちのほうが簡単である．関係式 $\phi = 1 + 1/\phi$ を繰り返し使うと

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [1; 1, 1, 1, \ldots]$$

となって，永遠に 1 が続く．ここにも ϕ の自己相似性が現れているのである．フィボナッチ数列において，漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ の両辺を a_{n+1} で割り，$b_n = a_{n+1}/a_n$ とおくと $b_1 = 1$

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$$

であることから，数列 $\{b_n\}$ は ϕ の連分数展開を途中で打ち切ったもの

$$1,\ 1 + \frac{1}{1} = 2,\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2},\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3},\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}, \ldots$$

に他ならないことがわかる．このことからも先に証明した事実 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \phi$ が見て取れる．

無理数と連分数展開　有理数は連分数展開で特徴付けることができる．すなわち，

定理

実数 x が有理数であるための必要十分条件は，x の連分数展開が途中で終わることである．

[証明] 連分数展開が途中で終われば，明らかに有理数だから，逆を示せば良い．有理数 x を整数 p, q を用いて $x = p/q$ と書く．$q > 0$ としてよい．

p を q で割り算して，商を a_0, 余りを r_1 とする：$p = a_0 q + r_1$. このとき

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}, \quad 0 \le r_1 < q$$

だから $\lfloor x \rfloor = a_0$ で，$x - a_0 = r_1/q < 1$ である．つぎのステップでは小数部分の逆数 $x_1 = q/r_1$ を考えるわけだが，上と同様に q を r_1 で割り算して商を a_1, 余りを r_2 とおくと $q = a_1 r_1 + r_2$ なので，$x_1 = q/r_1 = a_1 + r_2/r_1$ となり，$\lfloor x_1 \rfloor = a_1$, $x_1 - a_1 = r_2/r_1 < 1$ である．以下同様に $x_{i+1} = r_i/r_{i+1}$ を考えるために，r_i を r_{i+1} で割った商を a_{i+1}, 余りを r_{i+2} とすれば，$r_i = a_{i+1} r_{i+1} + r_{i+2}$ より

$$x_{i+1} = \frac{r_i}{r_{i+1}} = a_{i+1} + \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}}, \quad (0 \le r_{i+2} < r_{i+1})$$

である．すると「余り」の列は減少数列で $0 \le \cdots < r_{i+1} < r_i < \cdots < r_1 < q$ なので，この手続きは有限回でストップし，ある番号 N に対して $r_{N+1} = 0$ となる．このとき $x_N = a_N$ だから，連分数展開が止まる．このように，有理数の連分数展開はユークリッドの互除法と本質的に同じ手続きである．□

有理数とは整数の比であるから，次のように言い直すことができる．即ち，整数を係数とする一次方程式 $aX + b = 0$ の根を有理数という．有理数でない実数を無理数というわけだが，このように有理数を解釈するとき，有理数に最も近い無理数は，整数を係数とする 2 次方程式の根になるものであろう．これを **2 次無理数**と呼ぼう．一般に

定義

整数を係数とする n 次方程式の根であって，整数を係数とするどんな $n-1$ 次方程式の根にもならない実数を n 次無理数という．

この定義に従えば「有理数」は 1 次無理数である．また，$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ や ϕ は有理数ではなくて，それぞれ $X^2 - 2 = 0$, $X^2 - 3 = 0$, $X^2 - X - 1 = 0$ の根なのだから 2 次無理数である．

問　$\sqrt[3]{2}$ は 3 次無理数だが，2 次無理数ではないことを示せ．

　有理数の連分数展開は有限回でストップした．それでは，2 次無理数も連分数展開で特徴付けられるだろうか？まずは実験．$\sqrt{2}$ の連分数展開は既に求めたので，今度は $\sqrt{3}$ を連分数に展開してみよう．$1 < \sqrt{3} < 2$ なので，$a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

よって，$a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = 1$ である．このとき

$$x_2 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

なので，$a_2 = \lfloor x_2 \rfloor = 2$,

$$x_3 = \frac{1}{(\sqrt{3} + 1) - 2} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = x_1$$

となる．従って，以下 k が奇数なら $x_k = x_1, a_k = 1$ で，k が偶数なら $x_k = x_2, a_k = 2$ である．以上より，

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$$

のようになるから，$\sqrt{3}$ の展開においては 1,2 が繰り返し出現する．そう言えば $\sqrt{2}$ の展開においては最初の 1 を除けば 2 の繰り返しで，ϕ の展開では 1 だけがでてきた．このように，あるところから先は特定の自然数の列の繰り返しになるような連分数を**循環連分数**と呼ぶ．

問　$\sqrt{7}$ の連分数展開においては 1, 1, 1, 4 が繰り返し現れることを確認しなさい．

　実は一般に次が成り立つ．証明は後ほど行う．

定理 (ラグランジュ)

実数 x が 2 次無理数であるための必要十分条件は，x の連分数展開が循環連分数になることである．

次も 2 次無理数の著しい性質である．

定理

正の 2 次無理数は，目盛りのない定規とコンパスを用いて作図できる．

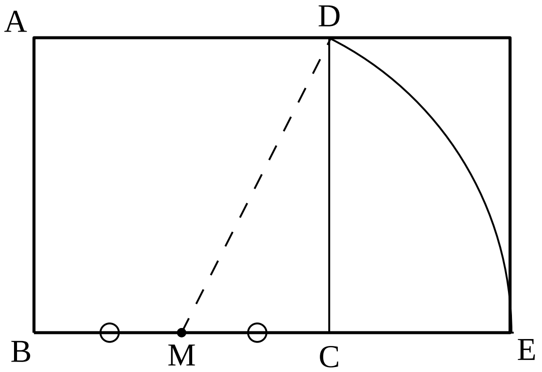


図 3　黄金長方形の作図

例えば，ϕ は次のように作図できる．

まず, 正方形 ABCD を書いて BC の中点 M をとる．M を中心として遠いほうの頂点 D までの長さを半径とする円を描く．BC の延長線と円の交点を E とする．AB を短辺, BE を長辺とする長方形を描けば，それは黄金長方形である．実際，正方形の一辺の長さを 1 とすれば，$\mathrm{MC} = 1/2$, $\mathrm{CD} = 1$ なので，ピタゴラスの定理より $\mathrm{MD} = \sqrt{(1/2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}/2$ である．従って，$\mathrm{BE} = \mathrm{BM} + \mathrm{MD} = 1/2 + \sqrt{5}/2 = \phi$. すなわち $\mathrm{AB} : \mathrm{BE} = 1 : \phi$ である．

先に，整数係数の代数方程式の次数によって無理数の階層を定義したが，どんな実数でもある n について n 次無理数になるかと言えば，そうではない．ある n について n 次無理数になる実数を**代数的数**と言い，そうでない実数を**超越数**と言う．例えば，円周率 π やネピア数 (自然対数の底) e は超越数である．その証明は難しい．(実は，実数全体の中で代数的数は非常に少ない．) ちなみに π や e の連分数展開はつぎのようになる．

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, \dots]$$
$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$$

3　ラグランジュの定理の証明

x を無理数とし，その連分数展開を

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

とする．すなわち $a_0 = \lfloor x \rfloor$, $x_1 = (x - a_0)^{-1}$, $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ とし，$x_2 = (x_1 - a_1)^{-1}$ とおく．以下順次 x_k が決まれば $a_k = \lfloor x_k \rfloor$, $x_{k+1} = (x_k - a_k)^{-1}$ のように帰納的に定まる．x は無理数なので，この操作は永遠に続き，小数部分 $x_k - a_k$ が 0 になることはない．x_k と x_{k+1} の関係は

$$x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{a_k x_{k+1} + 1}{x_{k+1}} \tag{1}$$

である．これをベクトルと行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

のように表示しよう．ただし縦ベクトルは，第 1 成分を分子，第 2 成分を分母とする分数を表すものと約束する．この規則で (2) 式の左辺を眺めれば，それは $x_k/1$ の意味である．(2) 式の右辺の行列の掛け算を通常のように計算すれば，答えとして得られる縦ベクトルにおいて，第 1 成分は $a_k x_{k+1} + 1$, 第 2 成分は x_{k+1} なので，結局，上の x_k を x_{k+1} で表した (1) 式とちゃんと整合性がとれている．2 項間の関係式を 2 回使って x_k を x_{k+2} で表すとき，普通の計算では

$$x_k = \frac{a_k x_{k+1} + 1}{x_{k+1}} = \frac{a_k \dfrac{a_{k+1} x_{k+2} + 1}{x_{k+2}} + 1}{\dfrac{a_{k+1} x_{k+2} + 1}{x_{k+2}}} = \frac{(a_k a_{k+1} + 1) x_{k+2} + a_k}{a_{k+1} x_{k+2} + 1}$$

となり，一方，行列を用いた計算では

$$\begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k a_{k+1} + 1 & a_k \\ a_{k+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるから，答えは同じである．このように，分数式の計算を行列の掛け算に置き換えられて便利なので，行列表示を用いるのである．さて (2) 式を繰り返し用いると

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．最右辺に現れた行列の積を

$$\begin{pmatrix} p_k & r_k \\ q_k & s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} & r_{k+1} \\ q_{k+1} & s_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & r_k \\ q_k & s_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k a_{k+1} + r_k & p_k \\ q_k a_{k+1} + s_k & q_k \end{pmatrix}$$

なので，成分を比較すると $r_{k+1} = p_k,\ s_{k+1} = q_k$ であることがわかる．また，数列 $\{p_k\}, \{q_k\}$ は漸化式

$$\begin{cases} p_0 = a_0,\ p_1 = a_0 a_1 + 1, \\ p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} q_0 = 1,\ q_1 = a_1, \\ q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} \end{cases} \tag{3}$$

をみたす．連分数展開に現れる数 $a_0, a_1, \ldots$ において，a_0 は負かも知れない整数であり，a_1 以降はすべて自然数である．よって漸化式 (3) より，p_k は整数であり q_k は自然数であることがわかる．$r_{k+1} = p_k,\ s_{k+1} = q_k$ だったから

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

だが，$\begin{pmatrix} a_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式は -1 なので，それら $k+1$ 個の積である $\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix}$ の行列式の値は $(-1)^{k+1}$ である．すなわち

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

である．

補題 1

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$ が成立する．

[証明]　p_k, q_k がみたす漸化式 (3) より

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0, \quad \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \dots, \frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

なので，ほぼ明らかだが念のため証明を与える．

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} q_{n-1} & -p_{n-1} \\ -q_n & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$x_{n+1} = \frac{q_{n-1}x - p_{n-1}}{-q_n x + p_n}$$

である．$x_{n+1} > 0$ だから

$$\frac{q_{n-1}x - p_{n-1}}{-q_n x + p_n} > 0$$

となる．両辺に $(-q_n x + p_n)^2$ をかけて x の 2 次不等式

$$(q_{n-1}x - p_{n-1})(q_n x - p_n) < 0$$

を得る．q_{n-1} や q_n は自然数だから正であり，x は p_{n-1}/q_{n-1} と p_n/q_n の間にあることがわかる．また，等式 $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$ の両辺を $q_n q_{n-1}$ で割ると

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}$$

である．よって

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| < \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

ここで，q_k は漸化式 $q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1}$ をみたすから，明らかに $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ である．従って，$\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = x$ である．□

注意　$x = \phi$ のときには $a_0, a_1, \dots$ は全部 1 なので数列 $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ はフィボナッチ数列であり，$\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ はその添え字番号を 1 だけ進めたものに他ならない．

補題 2

x が 2 次無理数のとき，x を根とする整数係数の 2 次方程式は「本質的に」ただひとつである．つまり，x を根とする整数係数 2 次方程式が 2 つあるとき，一方に適当な有理数を掛ければ他方になる．

[証明] x がふたつの整数係数 2 次方程式 $aX^2 + bX + c = 0, a'X^2 + b'X + c' = 0$ の根だとする．X に x を代入すれば

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

が成り立つ．それぞれを a' 倍，a 倍してから辺々引いて x^2 の項を消去すると

$$(a'b - ab')x + (a'c - ac') = 0$$

である．x は無理数なので整数係数の一次方程式の根にはならないから $a'b - ab' = 0$ であり $a'c - ac' = 0$ でなければならない．すなわち $a : b : c = a' : b' : c'$ である．よって最初の方程式に a'/a を掛ければ，2 番目の方程式になる．□

従って，2 次無理数 x を根とする整数係数の 2 次方程式 $aX^2 + bX + c = 0$ で，$a > 0$ かつ a, b, c の最大公約数が 1 であるものがたったひとつだけ見つかる．そして，x を根とするどんな整数係数の 2 次方程式も，これに 0 でない整数を掛けることによって得られる．x を根とする整数係数 2 次方程式の，x でないほうの根を x' と書き，x の**共役元**と呼ぶ．

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ならば} \quad x' = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{複号同順})$$

である．(注意：x は無理数だから，判別式 $b^2 - 4ac$ は 0 ではなく必ず正である．特に $x' \neq x$ である.)

補題 3

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は整数で，$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ であるものとし，二つの無理数 x, y に

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

という関係があるとする．このとき，x が 2 次無理数であることと y が 2 次無理数であることは同値である．x が 2 次無理数のとき，x を根とする整数係数 2 次方程式と y を根とする整数係数 2 次方程式のうちで判別式が等しいものが存在する．さらにそれぞれの共役元 x', y' に対して同じ関係式

$$\begin{pmatrix} y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

[証明] y が 2 次無理数ならば，それを根とする整数係数の 2 次方程式 $aX^2 + bX + c = 0$ がある．もちろん $a \neq 0$ である．$ay^2 + by + c = 0$ なので，x と y の関係式より

$$a\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^2 + b\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) + c = 0$$

を得るから，分母を払って整理すると $Ax^2 + Bx + C = 0$ となる．ただし，

$$\begin{aligned} &A = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ &B = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta, \\ &C = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 \end{aligned}$$

とおいた．よって x は整数係数の方程式 $AX^2 + BX + C = 0$ の根である．これが 2 次方程式であることを確かめよう．もし X^2 の係数 A が 0 なら，$a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 = 0$ である．$\gamma = 0$ ならば $a\alpha^2 = 0$ であり $a \neq 0$ だから $\alpha = 0$ となる．しかし $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ という仮定から，これは不可能である．よって $\gamma \neq 0$ である．両辺を γ^2 で割れば

$$a\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + b\frac{\alpha}{\gamma} + c = 0$$

となる．つまり，無理数である y を根とする整数係数の 2 次方程式 $aX^2 + bX + c = 0$ が有理数 α/γ を根にもつ事になり，矛盾である．従って $A \neq 0$ なので，y が 2 次無理数なら x もそうである．逆は，y と x を関係付ける行列の逆行列を用いて x を y で表示すれば同様である．また，直接計算により

$$B^2 - 4AC = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac$$

が確かめられるので，$aX^2 + bX + c = 0$ と $AX^2 + BX + C = 0$ の判別式は等しい．

最後の共役元に対する主張は，証明の前半から明らかである．すなわち y の共役元 y' をとれば $a(y')^2 + by' + c = 0$ である．$\alpha\delta \neq \beta\gamma$ だから，$y' = (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)$ が成り立つような z が定まる．すると，前半の計算から $Az^2 + Bz + C = 0$ が成り立つ．これは z が x の共役元であることを意味するが，共役元は唯ひとつしかないので $z = x'$ である．よって $y' = (\alpha x' + \beta)/(\gamma x' + \delta)$ である．□

この補題は，無理数 x の連分数展開の計算途中で現れる数 x_k に適用できる．x と x_k は，整数を成分とし行列式の値が ± 1 であるような行列で関係しているからである．すなわち x が 2 次無理数ならば x_k もそうであり，逆も正しい．また同様に，ある x_i が 2 次無理数ならば，どの x_j もそうであり，それらがみたす整数係数の 2 次方程式として判別式がみんな等しいものがとれる．

補題 4

d を自然数の定数とする．整数係数の 2 次方程式 $aX^2 + bX + c = 0$ で，判別式が与えられた自然数 d に等しく $ac < 0$ であるものは，有限個しかない．

[証明] 条件より，判別式 $b^2 - 4ac$ は自然数の定数 d である．また，条件 $ac < 0$ より $0 > 4ac = b^2 - d$ だから $b^2 < d$ で，この不等式をみたす整数 b は有限個しかない．その有限個の b の値のそれぞれに対して $4ac = b^2 - d$ をみたす整数の組 (a, c) も有限個である．従って，条件をみたす整数係数の 2 次方程式は有限個である．□

以上で準備完了．ラグランジュの定理を証明しよう．まず，x が 2 次無理数だと仮定して，その連分数が循環連分数であることを示す．$x > 0$ だとしてよい．実際もし $x < 0$ なら，連分数展開の最初のステップで現れる x_1 を考える．$x_1 > 0$ であって補題 3 より x_1 も 2 次無理数だから，x_1 の連分数展開について循環連分数であることを示せば，x の連分数展開に対しても同じことを言ったことになる．つまり x の代わりに x_1 を考えれば良いわけである．よって以降 $x > 0$ であるものとする．

さて，x は 2 次無理数なので，整数係数の 2 次方程式

$$aX^2 + bX + c = 0$$

の根である．関係式

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて，補題 3 の証明と同様にして得られる x_k を根とする整数係数の 2 次方程式を

$$A_kX^2 + B_kX + C_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

と書く．すると，判別式 $B_k^2 - 4A_kC_k$ は k によらず一定で $b^2 - 4ac$ に等しい．

さて，補題 3 を x, x_k に適用すれば，共役元についても

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成立するから，

$$\begin{pmatrix} x'_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} q_{k-2} & -p_{k-2} \\ -q_{k-1} & p_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．従って

$$x'_k = \frac{q_{k-2}x' - p_{k-2}}{-q_{k-1}x' + p_{k-1}} = -\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \cdot \frac{x' - \dfrac{p_{k-2}}{q_{k-2}}}{x' - \dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}}}$$

と変形できる．ここで，q_{k-1}, q_{k-2} は自然数であり，補題 1 より $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = x$ だったから，番号 k が非常に大きければ，上式の最右辺における分数式の分母と分子はどちらも $x' - x$ に近いので同符号になり，$x'_k < 0$ であることがわかる．また，

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ 1 \end{pmatrix}$$

だったので，補題 3 より x'_k, x'_{k+1} も同じ関係式をみたす．よって

$$x'_{k+1} = \frac{1}{x'_k - a_k}$$

だから，$x'_k < 0$ ならば $-1 < x'_{k+1} < 0$ である．すなわち，一旦 $x'_k < 0$ となれば，そこから先の番号 m に対しては必ず $-1 < x'_m < 0$ である．他方，x_k のほうは 1 未満の正数の逆数として定義したから，番号によらず常に $x_k > 1$ が成り立つ．従って特に，このような m に対しては $x_m x'_m < 0$ となる．よって根と係数の関係から，予め用意しておいた x_m と x'_m を 2 根とする整数係数の 2 次方程式

$$A_mX^2 + B_mX + C_m = 0$$

において，必ず $A_mC_m < 0$ が成立する．また，判別式 $B_m^2 - 4A_mC_m$ の値は，m によらず一定の自然数 $b^2 - 4ac$ だった．すると，補題 4 からこのような 2 次方程式のうち異なるものは高々有限個しかないことがわかる．

上で示したことを踏まえて，$x'_N < 0$ であるような番号 N をひとつとる．そして，x_{N+i} $(i = 1, 2, \ldots)$ を根とする整数係数 2 次方程式 $A_{N+i}X^2 + B_{N+i}X + C_{N+i} = 0$ を順番に調べていけば，何しろ異なるものは有限個しかないのだから，同じものが何度も現れることになる．番号 n とその先の番号 $n + \ell$ で同じ 2 次方程式が見つかったとする．このとき，x_n と $x_{n+\ell}$ は全く同じ整数係数 2 次方程式の正の根である．どちらの共役元も負であることがわかっているので，$x_n = x_{n+\ell}$ でなければならない．従って，連分数展開の仕方を考えれば，$x_i = x_{i+\ell}$ $(i = n, n+1, \ldots)$ である．$a_j = \lfloor x_j \rfloor$ なので，$a_i = a_{i+\ell}$ $(i = n, n+1, \ldots)$ も成り立ち，x の連分数展開においては $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+\ell-1}$ という自然数の並びがこれ以降繰り返し出現することになる．よって，2 次無理数の連分数は循環連分数である．

逆に，無理数 x の連分数展開が循環連分数だとすると，ある自然数 ℓ と n があって n 以上の i に対して $a_i = a_{\ell+i}$ が成り立つ．従って，x_i と $x_{\ell+i}$ の連分数展開は同一なので，補題 1 より $x_i = x_{\ell+i}$ $(i = n, n+1, \ldots)$ が成り立つ．特に $x_n = x_{n+\ell}$ である．従って

$$\begin{pmatrix} x_{n+\ell} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n+\ell-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+\ell} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n+\ell-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，これは整数を成分とする行列である．しかも $\gamma = a_{n+1} \cdots a_{n+\ell-1} \neq 0$ である $(\ell = 1$ なら $\gamma = 1)$．このとき

$$\begin{pmatrix} x_{n+\ell} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+\ell} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_{n+\ell} = \frac{\alpha x_{n+\ell} + \beta}{\gamma x_{n+\ell} + \delta} \Leftrightarrow \gamma x_{n+\ell}^2 + (\delta - \alpha) x_{n+\ell} - \beta = 0$$

なので $x_{n+\ell}$ は 2 次無理数である．すると，補題 3 より x 自身も 2 次無理数である．

以上で，ラグランジュの定理が証明された．□

問　2 次無理数 x で，その連分数展開が次のような形になるものを決定せよ．

(1)　ひとつの自然数 a だけが繰り返し現れる: $x = [a; a, a, \ldots]$

(2)　ふたつの自然数 a, b だけがこの順に繰り返し現れる: $x = [a; b, a, b, \ldots]$

上で与えたラグランジュの定理の証明では，連分数の循環がどこから始まるのか明確ではない．この点をはっきりさせておこう．

命題

2 次無理数 x の連分数展開において，循環が始まるのは $x_N > 1$ かつ $-1 < x'_N < 0$ となる最初の番号 N からである．ただし $x = x_0$ とする．

[証明] $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$ を 2 次無理数 x の連分数展開を考える際に現れる数だとして，N を $x_N > 1$ かつ $- < x'_N < 0$ となるような最小の番号とする．既に示したように，こういう番号は必ず存在し，N 以上のどんな番号 m に対しても $x_m > 1$ かつ $-1 < x'_m < 0$ が成立する．また，十分大きな任意の番号に対して $x_m > 1$ かつ $-1 < x'_m < 0$ が成り立つのだから，循環が始まる番号 n に対してもやはり $x_n > 1$ かつ $-1 < x'_n < 0$ が成り立たなければならない．従って $n \geq N$ である．

$n > N$ であると仮定して矛盾を導く．番号 n から循環が始まるので $x_n = x_{n+\ell}$ となる自然数 ℓ がある．このとき

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_{n+\ell-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+\ell-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+\ell} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+\ell-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

だから，$x_{n-1} - x_{n+\ell-1} = a_{n-1} - a_{n+\ell-1}$ である．

仮定 $n > N$ より $n-1 \geq N, n+\ell-1 \geq N$ だから，x_{n-1} と $x_{n+\ell-1}$ は 1 より大きい．また，$x_{n-1}, x_{n+\ell-1}$ はどちらも 2 次無理数であり，判別式の値が同じ値 d であるような整数係数 2 次方程式の根である．よって適当な整数 r_1, r_2, s_1, s_2 によって

$$x_{n-1} = \frac{s_1 + \sqrt{d}}{r_1}, \quad x_{n+\ell-1} = \frac{s_2 + \sqrt{d}}{r_2}$$

と書ける．すると

$$x_{n-1} - x_{n+\ell-1} = \frac{s_1}{r_1} - \frac{s_2}{r_2} + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\sqrt{d}$$

である．$\sqrt{d}$ は無理数であり，$x_{n-1} - x_{n+\ell-1}$ は整数だったから，$r_1 = r_2$ でなければならない．$r = r_1 = r_2$ とおけば，このとき

$$x_{n-1} - x_{n+\ell-1} = \frac{s_1}{r} - \frac{s_2}{r} = x'_{n-1} - x'_{n+\ell-1}$$

である．以上より，等式 $a_{n-1} - a_{n+\ell-1} = x_{n-1} - x_{n+\ell-1} = x'_{n-1} - x'_{n+\ell-1}$ が示された．

さて, 仮定 $n > N$ より $n-1 \geq N, n+\ell-1 \geq N$ だから, $-1 < x'_{n-1} < 0$ かつ $-1 < x'_{n+\ell-1} < 0$ が成り立つ．すると $|x'_{n-1} - x'_{n+\ell-1}| < 1$ であるから，$|a_{n-1} - a_{n+\ell-1}| < 1$ を得る．a_k は自然数なので，これは $a_{n-1} = a_{n+\ell-1}$ を意味する．従って $x_{n-1} = x_{n+\ell-1}$ である．全く同様にして，$x_{n-1} = x_{n+\ell-1} = x_{n+2\ell-1} = x_{n+3\ell-1} = \cdots$ であることが証明できる．しかし，これは連分数展開の循環が x_{n-1} から始まることを意味するから，n の取り方に矛盾である．以上より，$N = n$ でなければならない．□

4　おまけ：回文

（横書きで）左から読んでも右から読んでも同じになる文を「回文」という．「シンブンシ」や「タケヤブヤケタ」は有名な回文である．面白いことに，連分数展開にも回文が現れる．

定理

自然数 n によって $\sqrt{n}$ という形で表される無理数の連分数展開には，

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,c,\ b,\ a$$

というように，左から見ても右から見ても同じ自然数の列が繰り返し現れる．

[証明] $x = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + \sqrt{n}$ とおく．容易にわかるように，x は整数係数の 2 次方程式

$$X^2 - 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor X + (\lfloor\sqrt{n}\rfloor)^2 - n = 0$$

の根なので，2 次無理数である．x の連分数展開を

$$x = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots]$$

とする．x の共役元は $x' = \lfloor\sqrt{n}\rfloor - \sqrt{n}$ なので，$x > 1,\ -1 < x' < 0$ をみたすから，x の連分数展開は最初から循環が始まる．a_0，a_1，a_2，$\ldots$，$a_{\ell-1}$ の部分が繰り返し現れ $a_\ell = a_0,\ a_{\ell+1} = a_1,\ a_{\ell+2} = a_2, \ldots$ となるような最小の番号 ℓ をとる．すると

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{\ell-1} + \cfrac{1}{x}}}}$$

である．ここで $a_0 = \lfloor x\rfloor = 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ であり，

$$\frac{1}{x_1} = x - a_0 = (\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \sqrt{n}) - 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

が $\sqrt{n}$ の小数部分に他ならないことに注意すれば，$\sqrt{n}$ の連分数展開は

$$\sqrt{n} = \left[\lfloor\sqrt{n}\rfloor;\ \overline{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{\ell-1}, a_0}\right]$$

で与えられることがわかる．ただし, $\overline{a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_0}$ は, $a_1, \ldots, a_{\ell-1}, a_0$ の部分が循環する, という意味である．また, $1/x_1 = -x'$ だから $1/x_1$ は 2 次方程式 $X^2 + 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor X + (\lfloor\sqrt{n}\rfloor)^2 - n = 0$ をみたす 2 次無理数であることにも注意せよ.

x の連分数展開の計算に現れる数 $x_1, x_2, \ldots$ について

$$x_k = \frac{a_k x_{k+1} + 1}{x_{k+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{x_k} = \frac{x_{k+1}}{a_k x_{k+1} + 1} = \frac{1}{1/x_{k+1} + a_k} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/x_k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x_{k+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，$x_{\ell+1} = x_1$ なので

$$\begin{pmatrix} 1/x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．従って，$1/x_1$ の共役元を y とおくと補題 3 より

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つが，ここで

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

だから，逆行列を順次掛けていくことにより

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_\ell & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$$

が得られる．この式を分数式で表せば

$$y = -a_\ell + \cfrac{1}{-a_{\ell-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{-a_1 + \cfrac{1}{y}}}}$$

となる．ここで

$$y = \left(\frac{1}{x_1}\right)' = (\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)' = -\lfloor\sqrt{n}\rfloor - \sqrt{n} = -x$$

だから，上の y の展開式の両辺を -1 倍すれば

$$x = a_\ell + \cfrac{1}{a_{\ell-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x}}}}$$

を得る．もともとの x の展開式と比較すれば

$$a_k = a_{\ell-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, \ell - 1)$$

であることがわかる．以上より，

$$\sqrt{n} = \left[\lfloor \sqrt{n} \rfloor; \overline{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor}\right]$$

なので，$a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1$ の部分が回文のようになっている．□

例をいくつか挙げる：

$$\sqrt{19} = [4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$$
$$\sqrt{124} = [11; \overline{7, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 7, 22}]$$
$$\sqrt{139} = [11; \overline{1, 3, 1, 3, 7, 1, 1, 2, 11, 2, 1, 1, 7, 3, 1, 3, 1, 22}]$$
$$\sqrt{2140} = [46; \overline{3, 1, 5, 2, 2, 1, 1, 9, 1, 2, 3, 1, 1, 22, 1, 1, 3, 2, 1, 9, 1, 1, 2, 2, 5, 1, 3, 92}]$$