平成21年度

# 入　試　問　題

# 数　　　　学　【525】

試験開始の合図があるまでに，次の注意事項をよく読んでください。

1．試験開始の合図があるまで，問題用紙を開かないでください。

2．机の上には，受験票・鉛筆・シャープペンシル・消しゴム・鉛筆削り（電動式は除く）・腕時計（時刻表示機能だけのもの）・眼鏡以外のものは置かないでください。

3．問題用紙・解答用紙の両方に必ず志望学部（学校）・志望学科（専攻）・志望コース・受験番号・氏名・フリガナを記入してください。提出の前に記入漏れがないか再度確認してください。

4．「必須問題」については全員必ず解答してください。
「選択問題」については，5問題中3問題を選択し，解答してください。

5．選択した問題については，解答用紙左端の選択欄に○を必ず記入してください。

6．試験中に問題用紙の印刷不鮮明・ページの落丁・乱丁に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

7．問題用紙の余白等は適宜利用して構いません。

8．解答はすべて解答用紙の所定欄に記入してください。

9．配布された問題用紙・解答用紙は試験終了後回収しますので，持ち帰らないでください。

◇携帯電話・PHSなどは，電源を切った上でカバン等の中にしまってください。

| 志望学部（学校） | 志望学科（専攻） | 志望コース | 受験番号 | フリガナ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | （　　　　） | | | 氏名 | |

〔必須問題〕全員必ず解答してください。

〔1〕次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。

(1) 放物線 $y=x^2$ を平行移動させ，直線 $y=x$ に点 $(t,\ t)$ で接するようにした放物線を $C$ とする。この放物線 $C$ が放物線 $y=-x^2$ と共有点をもつような $t$ の値の範囲は，$\boxed{ア} \leqq t \leqq \boxed{イ}$ であり，$t$ の値がこの範囲にあるとき，放物線 $C$ と放物線 $y=-x^2$ とで囲まれる図形の面積は，$t=\boxed{ウ}$ で最大となり，その最大値は $\boxed{エ}$ となる。

(2) $x$，$y$ はそれぞれ，1と異なる正の数とする。このとき，

$$x^{\frac{y}{x}}=y^{\frac{x}{y}},\quad \log_x y+\log_y x=\frac{13}{6},\quad x<y$$

を満たす $x$，$y$ を求めると，$x=\dfrac{\boxed{オ}}{2}$，$y=\dfrac{\boxed{カ}}{4}$ となる。

(3) ある年齢層の男性について，確率が $\dfrac{1}{10}$ でかかっている病気Aがあるとする。健康診断でその年齢層の男性を25人検診した。$k$ を $0 \leqq k \leqq 25$ を満たす整数とするとき，25人中，病気Aにかかっている人数が $k$ 人である確率を $P_k$ とおく。このとき，

$$\frac{P_{k+1}}{P_k}-1=\frac{2(\boxed{キ}-5k)}{9(k+1)} \qquad (0 \leqq k \leqq 24)$$

となる。よって，$P_k$ が正の数であることに注意すると，

$0 \leqq k \leqq \boxed{ク}$ のとき，$P_k<P_{k+1}$，$\boxed{ク}+1 \leqq k \leqq 24$ のとき，$P_k>P_{k+1}$ となる。このことから，$P_k$ が最大となる $k$ は，$k=\boxed{ケ}$ の場合であることが分かり，そのとき，$P_k=3^{\boxed{コ}}\times 10^{-23}$ と表すことができる。また，$k=\boxed{ケ}$ の場合の次に $P_k$ が大きいのは，$k=\boxed{サ}$ の場合であることが分かる。

〔選択問題〕以下の5問題中3問題を選択し，解答してください。

選択した問題については，解答用紙左端の選択欄に○を記入してください。

〔２〕 2次関数 $y=x^2$ のグラフと，$x$ 軸，および直線 $x=1$ とで囲まれた図形を $S$ とするとき，次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。

(1) 直線 $y=b$ が，図形 $S$ を面積の等しい2つの部分に分けるとき，$b=\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 直線 $y=-x+1$ と，放物線 $y=x^2$，および直線 $x=1$ とで囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{12}$ である。

(3) 直線 $y=-x+k$ が，図形 $S$ を面積の等しい2つの部分に分けるとき，この直線と放物線 $y=x^2$ の $0<x<1$ の範囲における交点の $x$ 座標を $p$ とおく。このとき，$p$ は $4p^3-\boxed{\text{ウ}}\,p^2-\boxed{\text{エ}}\,p+\boxed{\text{オ}}=0$ を満たす。また，$p$ を小数で表したとき，その小数第1位の数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

〔 3 〕 関数 $f(x)=|x^3-3x|+3x$ について，次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。

(1) 関数 $f(x)$ は，$x=$ $\boxed{\text{ア}}$ で極大となり，$x=$ $\boxed{\text{イ}}$ で最小となる。

(2) $a$，$b$ は $-\sqrt{3}<a<0<b<\sqrt{3}$ を満たす定数とする。$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ において接線を引いたとき，その接線が点 $(b,\ f(b))$ においても $y=f(x)$ のグラフに接しているとすると，$a=$ $\boxed{\text{ウ}}$ ，$b=$ $\boxed{\text{エ}}$ である。また，その接線の方程式は $y=$ $\boxed{\text{オ}}$ $x+$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

〔４〕 1，3，5，…，17，19という1以上19以下の10個の奇数について，次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる整数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。

(1) これら10個の奇数の総和 $1+3+5+\cdots+17+19$ は，$\boxed{ア}$ である。

(2) これら10個の奇数のそれぞれの2乗の総和 $1^2+3^2+5^2+\cdots+17^2+19^2$ は，$\boxed{イ}$ である。

(3) これら10個の奇数のそれぞれの3乗の総和 $1^3+3^3+5^3+\cdots+17^3+19^3$ は，$\boxed{ウ}$ である。

(4) これら10個の奇数のうち，たがいに隣接する2つの奇数の積の総和 $1\cdot3+3\cdot5+\cdots+17\cdot19$ は，$\boxed{エ}$ である。

(5) これら10個の奇数のうち，たがいに隣接していない相異なる2つの奇数の積の総和 $1\cdot5+1\cdot7+\cdots+15\cdot19$ は，$\boxed{オ}$ である。

ただし，たがいに隣接する2つの奇数とは，1と3のように，その差が2である2つの奇数のこととする。

〔５〕 四角形ABCDは円に内接していて，

$$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{AD}=2,\ \angle\mathrm{BAD}=30^\circ,\ \mathrm{BC}=\mathrm{CD}$$

であるとする。また，対角線ACとBDの交点をPとする。このとき，次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ア}}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{イ}}\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\boxed{\text{ウ}}\,(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

(3) $k$ を正の定数として，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると，$k=\boxed{\text{エ}}\,(2-\sqrt{3})$ となる。

(4) 四角形ABCDの面積 $=\boxed{\text{オ}}\,(2-\sqrt{3})$

〔6〕 $a$, $b$を定数とする3次方程式 $x^3+ax+b=0$ が解として，1，$\cos\alpha$，$\cos\beta$をもつとき（ただし，$\alpha$，$\beta$は定数），次の $\boxed{\phantom{ア}}$ にあてはまる数を求め，解答のみを解答欄に記入しなさい。

(1) $a$のとり得る値の範囲は，$\boxed{\text{ア}} \leqq a \leqq \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$を解にもつ2次方程式は，
$x^2+\boxed{\text{ウ}}\,bx+\boxed{\text{エ}}\,b=0$ である。

(3) $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$で，かつ $b=-\dfrac{1}{5}$ とするとき，$\sin\alpha$，$\sin\beta$を解にもつ2次方程式を $x^2+cx+d=0$ と表すと，$c^2=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{5}$，$d=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{5}$ となる。