1 1個のさいころを3回投げる。1回目に出る目を a_1, 2回目に出る目を a_2, 3回目に出る目を a_3 とし, 整数 n を

$$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$$

と定める。

(1) $n=0$ である確率を求めよ。

(2) $|n|=30$ である確率を求めよ。

2 三角形 ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$, 外接円の半径は 1, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$, $\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$ である。

このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

3 四角錐 OABCD において，底面 ABCD は 1 辺の長さ 2 の正方形で

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = \sqrt{5}$$

である。

(1) 四角錐 OABCD の高さを求めよ。

(2) 四角錐 OABCD に内接する球 S の半径を求めよ。

(3) 内接する球 S の表面積と体積を求めよ。

4 実数 x の関数 $f(x)=|x-1|(x-2)$ を考える。$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+a$ との共有点の個数は，定数 a の値によって，どのように変わるかを調べよ。

5 a は正の実数とし，座標平面上の直線 l : $y=x$ と放物線 C : $y=ax^2$ を考える。C 上の点 (x,y) $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。

以下の問いに答えよ。

(1) $d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2) 実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

6 三角形 ABC の外心を O、重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

7 n 人 $(n \geqq 3)$ でじゃんけんを 1 回行うとき, 次の問いに答えよ。

(1) 1 人だけが勝つ確率を求めよ。

(2) あいこになる確率を求めよ。

(3) 勝つ人数の期待値を求めよ。

ここで「あいこ」とは 1 種類または 3 種類の手が出る場合であり, 勝つ人数が 0 の場合である。

8 n 段の階段を上るのに，一歩で１段，２段，または３段を上ることができるとする。この階段の上り方の総数を a_n とおく。たとえば，$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4$ である。

(1) $a_4,\ a_5$ の値を求めよ。

(2) $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3}\ (n \geqq 1)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) a_{10} の値を求めよ。

9 r は $0<r<1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n=0,1,2,3,\ldots)$ があり，その頂点を反時計回りに A_n, B_n, C_n, D_n とする。さらに R_n は次の条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i) 正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0,0)$, $\mathrm{B}_0(1,0)$, $\mathrm{C}_0(1,1)$, $\mathrm{D}_0(0,1)$ である。

(ii) $\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 A_2, A_3, A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2) A_{4n} の座標を (x_n, y_n) $(n=0,1,2,3,\ldots)$ とおく。$x_{n+1}-x_n$ および $y_{n+1}-y_n$ を r, n の式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を r を用いて表せ。

$\boxed{10}$ 三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

$\boxed{\mathbf{11}}$ $f(x) = x\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $g(x) = \log(1+x^2)$ （x は実数）とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right) - 2\log n\right\}$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{12}}$ $k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で１つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{13}}$ $a,\ b,\ c$ は実数とし,

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$$

とおく。さらに 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β と 2 つの虚数解をもち,

$$\alpha + \beta = -(a+1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{a}$$

を満たすと仮定する。

(1) $b,\ c$ を a を用いて表せ。

(2) a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) b のとり得る値の範囲を求めよ。

14 次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sqrt{x^2+y^2} \geqq x+y+a\sqrt{xy}$$

が任意の正の実数 x, y に対して成立するような，最大の実数 a の値を求めよ。

(2) 0 以上 1 以下の実数 a, b, c, d に対して

$$abcd \leqq \frac{4}{27} \text{ または } (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ。

15 座標平面上の点 (x, y) が

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0 \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

で定まる集合上を動くとき，x^2+y^2 の最大値，およびその最大値を与える x, y の値を求めよ。