第　1　問

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$$

を全て満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2\,dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

第　2　問

実数xの小数部分を，$0 \leqq y < 1$かつ$x-y$が整数となる実数yのこととし，これを記号$\langle x \rangle$で表す。実数aに対して，無限数列$\{a_n\}$の各項a_n($n=1, 2, 3, \cdots$)を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$のとき，数列$\{a_n\}$を求めよ。

(2)　任意の自然数nに対して$a_n = a$となるような$\dfrac{1}{3}$以上の実数aをすべて求めよ。

第　3　問

p，q を 2 つの正の整数とする。整数 a，b，c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような a，b，c を $[a,\ b\ ;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;c]$ に対して

$$w([a,\ b\ ;c]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。
また，$w([a,\ b\ ;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p = q$ の場合を考える。

(2)　s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ。

第　4　問

座標平面上の1点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$をとる。放物線$y=x^2$上の2点$\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta, \beta^2)$を，3点P，Q，RがQRを底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$の重心$\mathrm{G}(X, Y)$の軌跡を求めよ。