

## 第 1 問

座標平面において、点  $P(0, 1)$  を中心とする半径 1 の円を  $C$  とする。  $a$  を  $0 < a < 1$  を満たす実数とし、直線  $y = a(x + 1)$  と  $C$  との交点を  $Q, R$  とする。

- (1)  $\triangle PQR$  の面積  $S(a)$  を求めよ。
- (2)  $a$  が  $0 < a < 1$  の範囲を動くとき、 $S(a)$  が最大となる  $a$  を求めよ。

## 第 2 問

実数  $x$  の小数部分を,  $0 \leq y < 1$  かつ  $x - y$  が整数となる実数  $y$  のこととし, これを記号  $\langle x \rangle$  で表す。実数  $a$  に対して, 無限数列  $\{a_n\}$  の各項  $a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  を次のように順次定める。

$$(i) \quad a_1 = \langle a \rangle$$

$$(ii) \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

- (1)  $a = \sqrt{2}$  のとき, 数列  $\{a_n\}$  を求めよ。
- (2) 任意の自然数  $n$  に対して  $a_n = a$  となるような  $\frac{1}{3}$  以上の実数  $a$  をすべて求めよ。
- (3)  $a$  が有理数であるとする。  $a$  を整数  $p$  と自然数  $q$  を用いて  $a = \frac{p}{q}$  と表すとき,  $q$  以上のすべての自然数  $n$  に対して,  $a_n = 0$  であることを示せ。

## 第 3 問

$L$  を正定数とする。座標平面の  $x$  軸上の正の部分にある点  $P(t, 0)$  に対し、原点  $O$  を中心とし点  $P$  を通る円周上を、 $P$  から出発して反時計回りに道のり  $L$  だけ進んだ点を  $Q(u(t), v(t))$  と表す。

(1)  $u(t), v(t)$  を求めよ。

(2)  $0 < a < 1$  の範囲の実数  $a$  に対し、積分

$$f(a) = \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2} dt$$

を求めよ。

(3) 極限  $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a}$  を求めよ。

## 第 4 問

座標平面上の 1 点  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  をとる。放物線  $y = x^2$  上の 2 点  $Q(\alpha, \alpha^2)$ ,  $R(\beta, \beta^2)$  を、3 点  $P, Q, R$  が  $QR$  を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき、 $\triangle PQR$  の重心  $G(X, Y)$  の軌跡を求めよ。

## 第 5 問

$p, q$  を 2 つの正の整数とする。整数  $a, b, c$  で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え、このような  $a, b, c$  を  $[a, b; c]$  の形に並べたものを  $(p, q)$  パターンと呼ぶ。各  $(p, q)$  パターン  $[a, b; c]$  に対して

$$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

- (1)  $(p, q)$  パターンのうち、 $w([a, b; c]) = -q$  となるものの個数を求めよ。  
また、 $w([a, b; c]) = p$  となる  $(p, q)$  パターンの個数を求めよ。

以下  $p = q$  の場合を考える。

- (2)  $s$  を整数とする。 $(p, p)$  パターンで  $w([a, b; c]) = -p + s$  となるものの個数を求めよ。
- (3)  $(p, p)$  パターンの総数を求めよ。

## 第 6 問

(1)  $x, y$  を実数とし,  $x > 0$  とする。  $t$  を変数とする 2 次関数  $f(t) = xt^2 + yt$  の  $0 \leq t \leq 1$  における最大値と最小値の差を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点  $(x, y)$  全体からなる座標平面内の領域を  $S$  とする。

$x > 0$  かつ, 実数  $z$  で  $0 \leq t \leq 1$  の範囲の全ての実数  $t$  に対して

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

を満たすようなものが存在する。

$S$  の概形を図示せよ。

(3) 次の条件を満たす点  $(x, y, z)$  全体からなる座標空間内の領域を  $V$  とする。

$0 \leq x \leq 1$  かつ,  $0 \leq t \leq 1$  の範囲の全ての実数  $t$  に対して,

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

が成り立つ。

$V$  の体積を求めよ。