〔１〕 Oを原点とするxy平面において，直線$y=1$の$|x|\geqq 1$を満たす部分をCとする。

(1) C上に点$A(t,\ 1)$をとるとき，線分OAの垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2) 点AがC全体を動くとき，線分OAの垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。

〔２〕 自然数 n に対し，関数

$$F_n(x)=\int_x^{2x} e^{-t^n}\,dt \quad (x \geqq 0)$$

を考える。

(1) 関数 $F_n(x)\ (x \geqq 0)$ はただ一つの点で最大値をとることを示し，$F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ。

(2) (1)で求めた a_n に対し，極限値 $\lim_{n\to\infty} \log a_n$ を求めよ。

〔3〕 α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ および，その中心を通る直線 $\ell: y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ。

(2) 等式

$$2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq (\tan\alpha)x-\sin\alpha \\ x^2+(y+\sin\alpha)^2 \leqq 1 \end{cases}$$

の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔4〕 数列$\{a_n\}$を，

$$a_1 = 1,$$
$$(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める。

(1) $b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 等式

$$p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つように，定数 p, q, r の値を定めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ。

〔５〕 実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。座標平面上の２点 $P(x,\ y)$，$Q(u,\ v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき，行列 A により点 P は点 Q に移るという。

点$(1,\ 3)$は行列 A により点$(10,\ 10)$に移り，さらに等式

$$A^2-7A+10E=O$$

が成り立つものとする。ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A により点$(10,\ 10)$が移る点の座標を求めよ。

(2) 実数 a，b，c，d の値を求めよ。

(3) 次の条件(＊)を満たす直線 ℓ の方程式を求めよ。

（＊） 直線 ℓ 上のすべての点が行列 A により ℓ 上の点に移る。

〔6〕 dを正の定数とする。2点$A(-d,\ 0)$，$B(d,\ 0)$からの距離の和が$4d$である点Pの軌跡として定まる楕円Eを考える。点A，点B，原点Oから楕円E上の点Pまでの距離をそれぞれAP，BP，OPと書く。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 楕円Eの長軸と短軸の長さを求めよ。

(2) AP^2+BP^2および$AP \cdot BP$を，OPとdを用いて表せ。

(3) 点Pが楕円E全体を動くとき，AP^3+BP^3の最大値と最小値をdを用いて表せ。