

<h1>数 学</h1> <p>(問 題)</p> <p>2011年度</p>

〈2011 H23050111〉

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は2～3ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 問1，問2，問3，問4の全問を解答すること。
4. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。コンパス，定規は使用してもよい。
5. 受験番号および氏名は，試験がはじまってから，解答用紙の所定欄（2か所）に正確に記入すること。

受験番号の記入にあたっては，次の数字見本に従い，正確にでないに記入すること。

数字見本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

6. いかなる場合でも，解答用紙は必ず提出すること。
7. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

問1 曲線 $y = \log_4 x$ 上に, その x 座標を, それぞれ, $\frac{1}{2}t, t, 2t$ ($t > 0$) とする3点P, Q, Rをとる。このとき, PとRの距離は $\boxed{ア}$ であり, $\triangle PQR$ の面積は $\boxed{イ}$ である。空欄にあてはまる t の式を解答欄に記入せよ。

問2 次の問に答えよ。

(1) a, b は整数で, 2次方程式

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \dots\dots (A)$$

が異なる2つの実数解 α, β をもつとする。このとき, α, β はともに整数であるか, ともに無理数であるかのいずれかであることを証明する。以下の問に答え, 証明を完成せよ。

まず, $b = 0$ のときは, $x^2 + ax = 0$ であるから (A) は整数解 $0, -a$ をもつ。以下では $b \neq 0$ とする。

解と係数の関係より $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$ であり, これらは整数である。有理数と無理数の和は有理数でなく, 整数と整数以外の有理数の和は整数でないという事実を用いると, α, β がともに整数以外の有理数であるとして矛盾を導けばよい。

そこで, α, β が2以上の整数 p_1, p_2 と, 0でない整数 q_1, q_2 を用いて, 既約分数

$$\alpha = \frac{q_1}{p_1}, \quad \beta = \frac{q_2}{p_2}$$

で表されると仮定する。ここに, $\frac{q_i}{p_i}$ ($i = 1, 2$) が既約分数であるとは, p_i と $|q_i|$ の最大公約数が1であることをいう。このとき,

$$\alpha + \beta = \frac{p_2 q_1 + p_1 q_2}{p_1 p_2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

である。

問① ①において, $\alpha + \beta$ が整数であることを用いて, $p_1 = p_2$ であることを示せ。

問② ②において, $\alpha\beta$ が整数であることと問①の結果から, 既約分数の仮定に矛盾することを示せ。

問②の結果から, α, β はともに整数であるか, ともに無理数であることが示された。

(2) c が自然数のとき, \sqrt{c} は自然数であるか無理数であることを証明せよ。

問3 1回投げて表が出る確率 p , 裏が出る確率 $1-p$ のコインが1枚ある。このコインを1日に4回投げる試行をTとする。このとき、次の各問に答えよ。答のみ解答欄に記入せよ。

(1) 試行Tにおいて、2回以上表が出る確率 A を、 p の多項式として降べきの順に表せ。

(2) 試行Tを5日間続ける試行をSとする。

(i) 試行Sにおいて、5日間の中でちょうど3日だけ1日に2回以上表が出て、かつ、2日以上連続して1日に2回以上表が出る確率を、 A を用いて表せ。

(ii) 試行Sにおいて、2日以上連続して1日に2回以上表が出る確率を、 A の多項式として降べきの順に表せ。

問4 $a > 0$ とし、 $x-y$ 平面上に3点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $P(x, y)$ をとる。 l を与えられた正定数として、 P が

$$2PO^2 + PA^2 = 3l^2 \quad \dots\dots (*)$$

をみたすとする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) (*) をみたす P の集合が空集合とならないための a の条件を求め、そのときの $P(x, y)$ の軌跡を表す方程式を求めよ。

(2) 3点 O, A, P が一直線上にないような P が存在するとき、 OA を軸として、 $\triangle POA$ を回転して立体をつくる。この立体の体積が最大となるときの P の x 座標と最大の体積 V を、 a を用いて表せ。答のみ解答欄に記入せよ。

(3) (2) で求めた体積 V を最大とする a の値とそのときの最大の体積を求めよ。

[以下余白]