〔 I 〕 以下の問いに答えよ。ただし, 解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) 関数

$$f(x) = x\sin^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

の最大値を与える x を α とするとき, $f(\alpha)$ を α の分数式で表すと $\boxed{(1)}$ となる。

(2) 多項式

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

を因数分解すると $\boxed{(2)}$ となる。

(3) N を与えられた自然数とし, $f(x)$ および $g(x)$ を区間 $(-\infty,\ \infty)$ で N 回以上微分可能な関数とする。$f(x)$ と $g(x)$ から定まる関数を次のように定義する。t を与えられた実数として,

$$\begin{aligned}(f *_t g)(x) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{2^k k!} f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) \\ &= f(x)g(x) + \frac{t}{2} f'(x)g'(x) + \cdots + \frac{t^N}{2^N N!} f^{(N)}(x) g^{(N)}(x)\end{aligned}$$

とおく。ここに, $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 次導関数である（$g^{(k)}(x)$ も同様である）。

a を実数, n を N 以下の自然数とする。$f(x) = e^{2ax}$, $g(x) = x^n$ にたいし, 二項定理を用いて $(f *_t g)(x)$ を計算すると $\boxed{(3)}$ となる。

(4) 関係式

$$f(x) + \int_0^x f(t)e^{x-t}dt = \sin x$$

をみたす微分可能な関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると, $f'(x) = \boxed{(4)}$ となる。$f(0) = \boxed{(5)}$ であるから $f(x) = \boxed{(6)}$ となる。

〔II〕 行列 A と E を

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列

$$(E-A)^{-1}$$

を求めよ。

(2) 零ベクトルでないベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくとき,

$$\sqrt{X^2+Y^2}=r\sqrt{x^2+y^2}$$

をみたす r を求めよ。

(3) ベクトル $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ が与えられたとき, ベクトル $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を次のように定める。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

このとき,

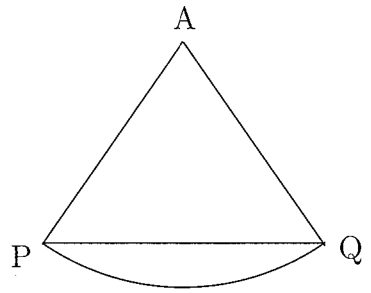
$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad と \quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

を求めよ。

〔Ⅲ〕 平面上の点 A を中心とする半径 a の円から，中心角が 60° で AP=AQ=a となる扇形 APQ を切り取る。つぎに線分 AP と AQ を貼り合わせて，A を頂点とする直円錐 K を作り，これを点 O を原点とする座標空間におく。

A, P はそれぞれ z 軸，x 軸上の正の位置にとり，扇形 APQ の弧 PQ は xy 平面上の O を中心とする円 S になるようにする。

また弦 PQ から定まる K の側面上の曲線を C とする。



以下の問いに答えよ。

(1) S の半径を b とする。S 上の点 R $(b\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ に対し，K 上の母線 AR と C の交点を M とする。b と線分 AM の長さを a と θ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を xy 平面に正射影したベクトルの長さを r とする。r を a と θ を用いて表し，定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2 d\theta$$

を求めよ。ただし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (a_1, a_2, a_3)$ を xy 平面に正射影したベクトルとは $\overrightarrow{\mathrm{OE'}} = (a_1, a_2, 0)$ のことである。