PLUS1 関数と図形①

1 右の図1のような台形ABCDがある。点PはAを出発して，毎秒2cmの速さで台形の周上をB，C，Dの順にDまで動くものとする。PがAを出発してからx秒後の△APDの面積を$y$cm²として，xとyの関係をグラフで表すと，右の図2のようになった。このとき，次の問いに答えなさい。

図1

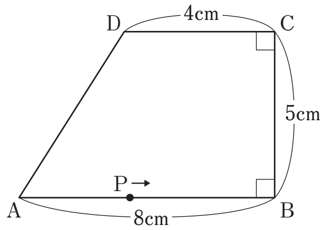
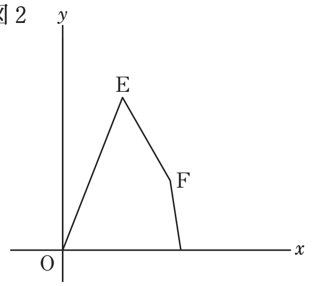


図2

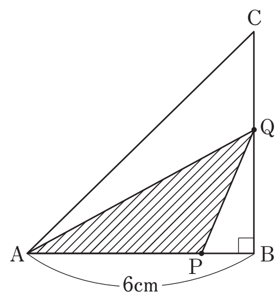


(1) 点Eの座標を求めなさい。

(2) 点Pが辺BC上にあるとき，yをxの式で表しなさい。

(3) △APDの面積が5cm²になるのは，点PがAを出発してから何秒後と何秒後か，求めなさい。

2 右の図のようなAB＝BC＝6cmの直角二等辺三角形がある。いま，動点PはAを出発し，毎秒3cmの速さで辺上を，A→B→Cの順に進み，Cに到着後停止する。また，動点Qは点Pと同時にBを出発し，毎秒2cmの速さで辺上を，B→Cと進み，Cに到着後停止する。2点P，Qが出発してx秒後の△APQの面積を$y$cm²とするとき，次の問いに答えなさい。

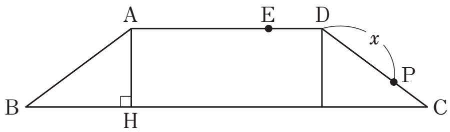


(1) 辺ACと辺PQが平行になるのは2点P，Qが出発してから何秒後か，求めなさい。また，そのときの△APQの面積を求めなさい。

(2) 点Pが出発してから停止するまでのxとyの関係を表すグラフをかきなさい。

(3) △APQの面積が△ABCの面積の$\frac{1}{3}$になるのは2点P，Qが出発してから何秒後か，求めなさい。

3 右の図の台形ABCDで，辺AD上に定点Eがある。いま，点PがDを出発して周上をC，B，Aの順にAまで移動するとき，点Pの移動距離を x，△APEの面積を y とする。AB＝CD＝5，AD＝7，BC＝15，AE＝5のとき，次の問いに答えなさい。

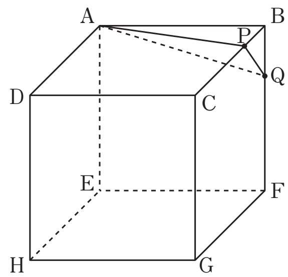


(1) 点Aから辺BCに引いた垂線AHの長さを求めなさい。

(2) 点Pが辺DC上にあるとき，y を x の式で表しなさい。

(3) 点Pが辺AB上にあるとき，y を x の式で表しなさい。

4 右の図のような，1辺が6cmの立方体ABCD-EFGHがある。2点P，Qが毎秒1cmの速さで頂点Bを同時に出発し，点Pは辺BC上を頂点Cの方向に移動し，頂点Cに到達したら辺CB上を移動し，頂点Bまで戻る。また，点Qは，辺BF，FGを通って頂点Gまで移動する。2点P，Qが頂点Bを出発してから x 秒後の三角錐A-BPQの体積を y cm^{3}とするとき，次の問いに答えなさい。



(1) $0 \leqq x \leqq 6$ のとき，y を x の式で表しなさい。

(2) $6 \leqq x \leqq 12$ のとき，y を x の式で表しなさい。

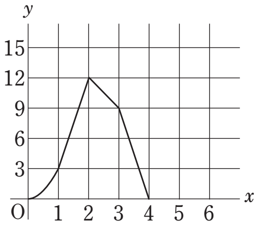
PLUS1 関数と図形①

1. (1)　(4，20)　　(2)　$y=-4x+36$

(3)　1秒後，$\dfrac{15}{2}$秒後

2. (1)　時間…$\dfrac{6}{5}$秒後　面積…$\dfrac{108}{25}$cm²

(2)



(3)　$\sqrt{2}$秒後，$\dfrac{10}{3}$秒後

3. (1)　3　　(2)　$y=\dfrac{3}{2}x$

(3)　$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{75}{2}$

4. (1)　$y=x^2$

(2)　$y=-6x+72$

解説

図1

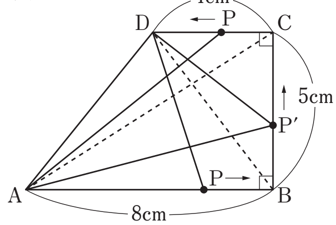
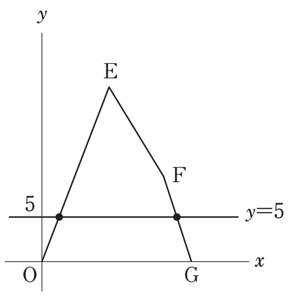


図2



1. (1)　図1より，△APDの面積は，点Pが辺AB上を頂点AからBまで動く間は増加し，辺BC上を頂点BからCまで動くときと，辺CD上を頂点CからDまで動くときは減少する。よって，図2のグラフの点Eは点Pが頂点Bにあるときの x と y の関係を表している。点Pが頂点Bに達するのは頂点Aを出発してから，$8\div2=4$(秒)後であり，このとき，△APD＝△ABD＝$\dfrac{1}{2}\times8\times5=20$ だから，点Eの座標は(4，20)である。

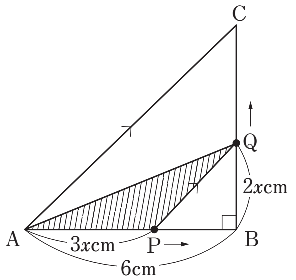
(2)　図1から，△AP′Dの面積は，〔台形ABCD〕－△ABP′－△DP′Cで求められる。〔台形ABCD〕＝$\dfrac{1}{2}\times(4+8)\times5=30$　BP′＝(AB＋BP′)－AB＝$2\times x-8=2x-8$，P′C＝(AB＋BC)－(AB＋BP′)＝$(8+5)-2\times x=13-2x$ より，△ABP′＝$\dfrac{1}{2}\times8\times(2x-8)=8x-32$，△DP′C＝$\dfrac{1}{2}\times4\times(13-2x)=26-4x$　よって，△AP′D＝$30-(8x-32)-(26-4x)=-4x+36$ より，$y=-4x+36$

(3)　△APDの面積が5cm²になるとき，点Pが頂点Aを出発してからの時間は，図2のグラフと直線 $y=5$ との交点の x 座標として求められる。点Fは点Pが頂点Cにあるときの x と y の関係を表しているので，x 座標が，$(8+5)\div2=\dfrac{13}{2}$ より，y 座標は，$y=-4\times\dfrac{13}{2}+36=10$　よって，図2のように，直線 $y=5$ は線分OE，FG

と交わる。まず，直線OEは原点Oを通り，傾きは$\dfrac{20}{4}=5$だから，その式は，$y=5x$　これに$y=5$を代入すると，$5=5x$，$x=1$　次に，点Gは点Pが頂点Dにあることを示しており，点Pが頂点Dに達するのは頂点Aを出発してから，$(8+5+4)\div2=\dfrac{17}{2}$(秒)後だから，$\mathrm{G}\left(\dfrac{17}{2},\ 0\right)$　これと，$\mathrm{F}\left(\dfrac{13}{2},\ 10\right)$より，直線FGの式は，$y=-5x+\dfrac{85}{2}$　これに$y=5$を代入して，$5=-5x+\dfrac{85}{2}$，$x=\dfrac{15}{2}$　以上より，△APDの面積が5cm²になるのは，点Pが頂点Aを出発してから１秒後と$\dfrac{15}{2}$秒後

2. ⑴　図１で，PQ∥ACとなるとき，△PBQはPB＝BQの直角二等辺三角形である。点Pは毎秒3cmの速さで進むから，$\mathrm{AP}=3\times x=3x$より，$\mathrm{PB}=\mathrm{AB}-\mathrm{AP}=6-3x$　点Qは毎秒2cmの速さで進むから，$\mathrm{BQ}=2\times x=2x$　よって，$6-3x=2x$が成り立ち，これを解くと，$x=\dfrac{6}{5}$(秒)後　このとき，$\mathrm{AP}=3\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{18}{5}$，$\mathrm{BQ}=2\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{12}{5}$より，$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{18}{5}\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{108}{25}$(cm²)

図１



⑵　$6\div3=2$，$6\times2\div3=4$より，点Pは頂点Aを出発してから２秒後に頂点Bに，４秒後に頂点Cに到着する。また，$6\div2=3$より，点Qは頂点Bを出発してから３秒後に頂点Cに到着する。そこで，$0\leqq x\leqq2$，$2\leqq x\leqq3$，$3\leqq x\leqq4$の場合に分けて考える。$0\leqq x\leqq2$のとき，点Pは辺AB上，点Qは辺BC上にあり，△APQは図２の$\triangle\mathrm{AP_1Q_1}$のようになる。$\mathrm{AP_1}=3x$，$\mathrm{BQ_1}=2x$だから，$y=\dfrac{1}{2}\times3x\times2x$より，$y=3x^2$　$2\leqq x\leqq3$のとき，点Pも点Qも辺BC上にあり，$\triangle\mathrm{AP_2Q_2}$のようになる。$\mathrm{P_2Q_2}=\mathrm{BQ_2}-(\mathrm{AB}+\mathrm{BP_2}-\mathrm{AB})=2x-(3x-6)=-x+6$だから，$y=\dfrac{1}{2}\times(-x+6)\times6$より，$y=-3x+18$　$3\leqq x\leqq4$のとき，点Pは辺BC上，点Qは頂点Cにあり，$\triangle\mathrm{AP_3C}$のようになる。$\mathrm{P_3C}=6+6-3x=-3x+12$だから，$y=\dfrac{1}{2}\times(-3x+12)\times6$より，$y=-9x+36$　以上より，グラフは解答のようになる。

図２

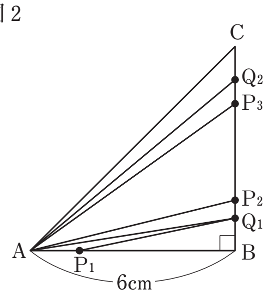
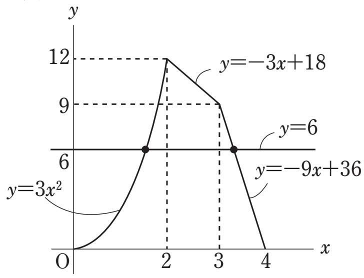
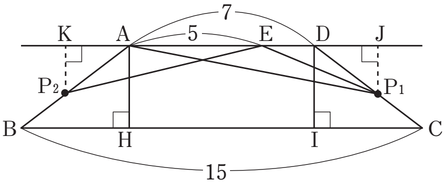


図３



⑶　$\triangle\mathrm{ABC}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\dfrac{1}{3}=6$であるから，図３のグラフに直線$y=6$をかき込むと，交点が２個できる。それらの$x$座標を求めればよい。まず，放物線$y=3x^2$と直線$y=6$の交点は，$3x^2=6$より，$x=\pm\sqrt{2}$　$0\leqq x\leqq2$より，$x=\sqrt{2}$　次に，直線$y=-9x+36$と直線$y=6$の交点は，$6=-9x+36$より，$x=\dfrac{10}{3}$　これは$3\leqq x\leqq4$を満たす。したがって，△APQの面積が△ABCの面積の$\dfrac{1}{3}$になるのは，２点P，Qが出発してから，$\sqrt{2}$秒後と$\dfrac{10}{3}$秒後

3．(1)　図の△ABHで，三平方の定理より，$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}$　また，台形ABCDはAB＝DC＝5の等脚台形で，点Dから辺BCに垂線DIを引くと，四角形AHIDは長方形となり，△ABH≡△DCIとなる。よって，HI＝AD＝7より，$BH=CI=\frac{1}{2}\times(15-7)=4$　したがって，$AH=\sqrt{5^2-4^2}=3$



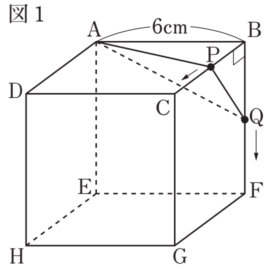
(2)　図のように，点Pが辺DC上にあるとき（点P_1とする），点P_1から辺ADの延長上に垂線P_1Jを引くと，AJ∥BCの錯角より$\angle JDP_1=\angle ICD$であり，$\angle J=\angle I=90^\circ$だから，$\triangle P_1JD \backsim \triangle DIC$である。よって，$P_1J:DI=DP_1:CD$が成り立ち，DI＝AH＝3より，$P_1J:3=x:5$，$P_1J=\frac{3}{5}x$

したがって，$y=\triangle AP_1E=\frac{1}{2}\times5\times\frac{3}{5}x=\frac{3}{2}x$

(3)　図で，点Pが辺AB上にあるとき（点P_2とする），点P_2から辺ADの延長上に垂線P_2Kを引くと，$\triangle P_2KA \backsim \triangle AHB$より，$P_2K:AH=P_2A:AB$が成り立つ。よって，$P_2A=5+15+5-x=25-x$より，$P_2K:3=(25-x):5$，$P_2K=\frac{3}{5}(25-x)$　したがって，$y=\triangle AP_2E=\frac{1}{2}\times5\times\frac{3}{5}(25-x)=-\frac{3}{2}x+\frac{75}{2}$

4．(1)　2点P，Qは頂点Bを同時に出発し，毎秒1 cmの速さで点Pは辺BC上を往復し，点Qは2辺BF，FG上を移動するから，xの変域が$0 \leqq x \leqq 6$のとき，図1のように，点Pは辺BC上に，点Qは辺BF上にある。このとき，$BP=1\times x=x$，$BQ=1\times x=x$より，$y=\frac{1}{3}\times\triangle BPQ\times AB=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times x\times x\right)\times6=x^2$より，$y=x^2$と表される。

図1



(2)　$x=6$のとき，点Pは頂点Cに，点Qは頂点Fに到達するから，xの変域が$6 \leqq x \leqq 12$のとき，図2のように，点Pは辺BC上を頂点Bの方向に移動し，点Qは辺FG上にある。このとき，PB＝$6+6-x=12-x$と表され，△BPQの底辺をPBとすると，高さはFB＝6となり一定である。よって，$y=\frac{1}{3}\times\triangle BPQ\times AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(12-x)\times6\times6=-6x+72$より，$y=-6x+72$と表される。

図2