数学 I

1 ―― 2 次関数

入試対策　2 次関数のグラフは，平方完成形への変形によって求められるが，この変形は意外にできないものである。直線との交わる，接するの位置関係が最も出題頻度が高いので，基本問題で解決の手法を徹底的にマスターすることが大切である。次に注目すべきは最大・最小問題で，いろいろな形式がある。十分な練習によってしっかり基礎をつくり，応用問題に対処すべきである。教科書の範囲を超えた内容もかなり出題されるので，とくに注意して幅広く勉強したい。

1st step

☞解答は「考え方と解答」3 ページ

1　2 次関数 $f(x)=ax^2+bx-2$ がある。その最小値は $-\dfrac{49}{12}$ であり，$f(x)=0$ の 1 つの解が -2 であるとき，a，b の組を求めると $(a,\ b)=\boxed{}$ である。　（南山大－経営）

2　(1)　$y=\dfrac{1}{2}(x^2-x+|x^2-x|)$ のグラフをかけ。

(2)　(1)のグラフと直線 $y=a(x-2)$ との交点がちょうど 2 点となるような a の範囲を求めよ。　（防衛大）

3　$y=x^2+a^2$ と $y=2ax+1$ の交点を A，B とする。線分 AB の長さが 4 であるような実数 a を求めよ。　（城西大－数学）

4　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から $y=x^2+x$ に 2 本の接線をひく。そのおのおのの接点を Q，R とするとき，Q，R の中点の x 座標を求めよ。　（自治医大）

5 $0^\circ<\theta<90^\circ$ とし，$f(x)=(\cos\theta)x^2-2(\sin\theta)x-\cos\theta+1$ とおく。

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数を求めよ。 (大分大－工・教育)

6 p，q を素数とし，2次関数 $f(x)=x^2+px+q$ が次の2条件をみたすとき，$f(x)$ を求めよ。

(ア) ある実数 a に対して $f(a)<0$ (イ) 任意の整数 n に対して $f(n)\geqq 0$ (高知大－理)

7 x，y が $y=x^2-[x]^2+3$ $(-2\leqq x<2)$ をみたす。ただし，$[x]$ は x をこえない最大の整数を表す。このとき，

(1) y のとりうる値の範囲は $\boxed{}<y<\boxed{}$ である。

(2) $k=y-3x$ のとりうる値の範囲は $\boxed{}\leqq k\leqq\boxed{}$，$\boxed{}<k\leqq\boxed{}$ である。

(日本大－生産工)

8 3点 A(1, 0)，B(3, 2)，P(2, v) が与えられている。ここで $v\fallingdotseq 1$ とする。このとき，直線 AP と点 A で接し，直線 BP と点 B で接する，軸が y 軸と平行な放物線の方程式を求めよ。 (神戸女大)

9 直角三角形の土地があり，斜辺の長さは 10m である。また，この土地に含まれる長方形で，1つの頂点がこの三角形の直角の頂点であるものの面積の最大値は $10\,\mathrm{m}^2$ である。この三角形の残りの2辺の長さを求めよ。 (立教大－経済)

10 面積が1の△ABC の辺 AB 上に点 D をとり，AB：DB＝1：t とする。D から BC に平行な直線をひき AC との交点を E とする。また，D から AC に平行な直線をひき BC との交点を F とし，E から AB に平行な直線をひき BC との交点を G とする。線分 DF と線分 EG が交わらないとき，四角形 DEGF の面積を S とし，線分 DF と線分 EG が交わるときは，交点を H として △DEH の面積を S とする。

(1) S を t で表せ。 (2) S と t の関係をグラフにかけ。

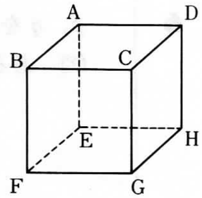
(3) S の最大値を求めよ。 (専修大－経営)

11 不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解が $-4<x<3$ であるとき，不等式 $ax^2+5bx+3c<0$ の解は $x<\boxed{}$，$\boxed{}<x$ である。 (桃山学院大－経済)

12 (1) 不等式 $2x^2-3x-5>0$ を解け。

(2) (1)の不等式をみたし，同時に，不等式 $x^2+(a-3)x-2a+2<0$ をみたす x の整数値がただ1つであるように実数 a の条件を定めよ。 （成城大－法）

13 図のように立方体 ABCDEFGH がある。AD$=a$ とする。動点 P は H を出発し，線分 HD 上を一定速度で動く。動点 Q は D を出発し，線分 DB 上を一定速度で動く。P，Q が同時に出発したところ，P が D に，Q が B に同時に到着した。線分 PQ の長さの最小値を a で表せ。 （専修大－法）

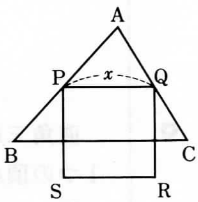


14 3つの点 P，Q，R が，1辺の長さが1の正方形 ABCD の頂点 A，B，C をそれぞれ出発して，正方形の周上を A → B → C → D → A の向きにそれぞれ秒速1，1，2で動く。出発後 x 秒のときの △PQR の面積を S とする。

(1) $0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき，S が最小となるのはいつか。

(2) $0<x<1$ のとき，S が最小となるのはいつか。 （追手門学院大）

15 図のような鋭角三角形 ABC において，辺 BC の長さは6，面積は12である。辺 BC に平行な直線が2辺 AB，AC と交わる点をそれぞれ P，Q とし，PQ を1辺とする正方形 PQRS を A と反対側につくる。PQ の長さを x，正方形 PQRS と △ABC の共通部分の面積を y とする。



(1) 正方形 PQRS の辺 SR が BC 上にあるときの x を求めよ。

(2) y を x を用いて表し，そのグラフをかけ。

(3) y の最大値を求めよ。 （大阪教育大）

16 a を定数として，放物線 $C_a: y=-x^2+ax+a^2$ を考える。

(1) 放物線 C_a の頂点は $\left(\dfrac{a}{\boxed{\text{ア}}},\ \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a^2\right)$ であるから，頂点は曲線 $y=\boxed{\text{エ}}\,x^2$ 上にある。

(2) 座標平面上の2点 A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ 4)$ を通る直線を l とする。放物線 C_a が直線 l と共有点をもつための a の範囲は $a\leqq\boxed{\text{オカ}}$，$a\geqq\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。C_aと l の共有点の座標は，$a=\boxed{\text{オカ}}$ のとき $(\boxed{\text{ケコ}},\ \boxed{\text{サ}})$，$a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき $\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$ である。

また，C_aと線分 AB が異なる2点を共有するための a の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}<a\leqq\boxed{\text{テ}}$ である。 （センター試験）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」6ページ

17 関数 $f(x)=||x^2-1|-a|$ のグラフをかけ。ただし，a は正の定数とする。（武蔵工大）

18 m を正の整数の定数とし，$f(x)=-(m+1)x^2+(m^2+3)x$ とおく。変数 x が整数値のみをとるとき，$f(x)$ の最大値を求めよ。（京都府医大）

19 $a>0$，$c\leqq 1$ のとき，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ …① と1次関数 $y=2x+1$ …② がある。

(1) ①のグラフの放物線と②のグラフの直線が，ただ1点で交わるとき，b，c の値を求めよ。

(2) (1)で求めた b，c を係数とする①の放物線を l とし，l と②のグラフの直線との交点をAとする。このとき，Aの座標を求めよ。

(3) 放物線 l の頂点をBとするとき，距離ABがBと x 軸との距離に等しくなるように a の値を定めよ。（成蹊大－工）

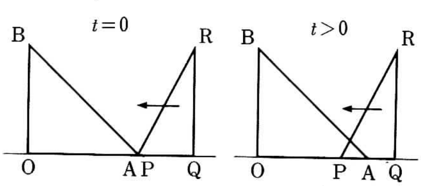
20 正の実数 a に対して $f(x)=\left|ax^2-\dfrac{1}{a}\right|$ とする。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ における $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値 $g(a)$ を求めよ。

(3) $g(a)$ の最小値を求めよ。（立教大－社会）

21 図のように平面上に固定された直角三角形OABと，直線OA上を一定の速さで動く直角三角形PQRがある。△PQRは，時刻 $t=0$ では頂点Pが頂点Aに重なる位置にあり，左へ速度1で動くものとする。時刻 t での2つの三角形の重なり合った部分の面積を $S(t)$ とする。OA＝OB＝4，PQ＝2，QR＝4とするとき，



(1) $S(t)$ を t の式で表せ。

(2) $S(t)$ が最大になる t を求めよ。（専修大－経済）

22 関数 $y=ax^2-a^2x+1$ $(a>0)$ が，$0\leqq x\leqq 1$ のとき $0\leqq y\leqq 1$ となるための定数 a の値の範囲を求めよ。（東海大－理）

23 2つの放物線 $y=x^2+k$ と $x=y^2+k$ の両方に接する直線で，異なるものが3本ひけるような k の値の範囲を求めよ。 （山口大－文系）

24 放物線 $y=x^2$ を x 軸方向に a $(a\neq0)$ だけ平行移動した曲線と，直線 $y=\dfrac{1}{a}x$ との交点をP，Qとする。

(1) 弦PQの長さを a の式で表せ。

(2) a が正の整数1，2，3，… の値をとって変わるとき，弦PQの長さの整数部分を求めよ。 （名城大－薬）

25 底面の半径が a，高さが h の直円錐に底面を共有して内接する直円柱の半径を x とする。円柱の高さは $\boxed{}$ となるから，円柱の全表面積 S は $S=\boxed{}$ となる。a と h の間に $\boxed{}$ の関係があるときに S は $x=\boxed{}$ で最大になるが，そうでなければ S は x に関して $(0,\ a)$ の範囲で $\boxed{}$ になる。 （大阪薬大）

26 △ABCは $\angle C=90°$，$CA=1$，$AB=2$ である。△ABCの周上を点Pは頂点BからCまで辺BC上を等速で進む。点Qは頂点CからAを通ってBまで毎秒1の速さで進む。P，Qは同時に出発し，それぞれの終点C，Bに同時に到着した。この間における距離PQの最小値を求めよ。またそれは出発何秒後か。 （関西大－商）

27 △ABCの各頂点の座標を $A(t-2,\ 0)$，$B(t,\ 0)$，$C(t-1,\ \sqrt{3})$ とし，△DEFの各頂点の座標を $D(0,\ 0)$，$E(4,\ 0)$，$F(3,\ \sqrt{3})$ とする。ただし，t は $0\leqq t\leqq6$ の範囲で動くものとする。

(1) △ABCと△DEFが重なる部分の面積 S を t で表し，そのグラフをかけ。

(2) S の最大値 M を求めよ。

(3) $S=\dfrac{M}{4}$，$S=\dfrac{3}{4}M$ となる t をそれぞれ求めよ。 （同志社大－商）

28 長さ1の針金を2つに切り，その1つで円周をつくり，残りで2辺の長さの比が $1:k$（k は正の定数）の長方形をつくる。

(1) この円と長方形の面積の和を最小にするためには，針金をどのように切ればよいか。

(2) k をいろいろ変えたとき，(1)の円と長方形の面積の和の最小値 $S(k)$ が最大になるような k の値を求めよ。 （京大－文系）

29 曲線　$y=|x^2+2x-3|$ …① と，直線　$y=ax-2a+1$ …② がある。(a は実定数とする。)

(1) 曲線①のグラフの概形をかけ。

(2) 直線②は a の値にかかわらず定点を通ることを示せ。

(3) 直線②が曲線①に接するとき，a の値を求めよ。

(4) 直線②と曲線①の共有点の個数を求めよ。 (長崎総合科学大)

30 2 次関数 $f(x)=2x^2+ax+b$ が任意の実数 x に対して正の値をとるならば，ある実数の定数 p，q によって $f(x)=(x+p)^2+(x+q)^2$ と表されることを示せ。 (東京女大－数理)

31 $P=2x^2+2xy+5y^2-6x-6y+5$ とする。

(1) x，y がすべての実数値をとりうるとき，P の最小値を求めよ。

(2) $-1\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 3$ の範囲で，P の最大値と最小値を求めよ。 (長崎総合科学大)

32 点 $(x,\ y)$ が曲線 $x^2-xy+y^2=2$ 上を動くとき，

(1) $x+y=u$ とおいて，$(x+1)(y+1)$ を u の式で表せ。

(2) $(x+1)(y+1)$ のとりうる値の範囲を求めよ。 (名城大－理工)

33 x，y は実数の変数とする。

(1) $x-y\geqq 0$，$x+2y-2\geqq 0$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(2) $(x-1)(x-y-1)\leqq 0$ のとき，$(x+y)^2+(2x-y)^2$ の最小値を求めよ。 (東京理大－工)

34 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を $f_{\min}(a,\ b)$，最大値を $f_{\max}(a,\ b)$，また同じ区間における $f(x)$ の絶対値の最大値を $g(a,\ b)$ と表す。ただし，a は $a\geqq 0$ である任意の実数，b は任意の実数とする。

(1) $f_{\min}(a,\ b)$ および $f_{\max}(a,\ b)$ を求めよ。

(2) いま，a の値を任意に 1 つ選び固定する。$g(a,\ b)$ が最小となるときの b は次の式をみたすことを示せ。

$$f_{\min}(a,\ b)+f_{\max}(a,\ b)=0$$

(3) a と b をともに動かしたとき，不等式 $g(a,\ b)\geqq \dfrac{1}{2}$ がつねに成立することを示せ。

(4) (3)の不等式で等号が成立するのは，$a=0$ かつ $b=-\dfrac{1}{2}$ のときに限られることを示せ。

(5) a が $a\geqq 0$ と限定しない任意の実数であるとした場合にも，(3)の不等式が成立することを示せ。 (名大－工)

2 集合，場合の数

入試対策　ここでは，おもに集合，順列，組合せを扱う。この内容だけの単独問題は少数で，多くは小問の一部として出題される。とくに順列・組合せは次節の確率の計算の基礎になっている。的確な場合分けと，数え残しをしないこと。１つの問題でも何通りかの解き方のあるのが，本節の問題の特徴である。自分で考えないで別冊の解答にすぐ頼るのではなく，自分の答えをつくり出すことが大切。その考え方が実力アップにつながる。順列Pと組合せCの使い分けに，とくに注意したい。

1st step

☞解答は「考え方と解答」11 ページ

35　100 以下の自然数のうち，4，5，6 の倍数全体の集合をそれぞれ X，Y，Z とする。このとき，集合 $Y\cup Z$ の要素の個数は $\boxed{}$，集合 $X\cup(Y\cap Z)$ の要素の個数は $\boxed{}$ である。

（北海道薬大）

36　2 個の数を要素とする 2 つの集合 $A=\{a,\ b\}$ と $B=\{c,\ d\}$ がある。$a+b=c+d$，$ab=cd$ ならば，$A=B$ であることを示せ。　（神戸女大）

37　座標平面において，集合 A，B_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$，C を次のように定める。

$A=\{(x,\ y)\,|\,y=2x-2\}$，$B_k=\{(x,\ y)\,|\,y\geqq x^2-k\}$，$C=\{(x,\ y)\,|\,x,\ y\text{ は整数}\}$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$A\cap B_k$ が 1 つの要素からなる集合であるような k の値を求めよ。

(2)　$A\cap B_{10}\cap\overline{B}_5\cap C$ の要素をすべて求めよ。　（京都産業大―経営）

38　n 個の異なったボールを，m 個の異なった箱に，どの箱の中にも少なくとも 1 つのボールが入るように入れる。このような方法の総数を $N(n,\ m)$ とする。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$N(n,\ 2)$ を求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，$N(n,\ 3)$ を求めよ。　（岐阜大）

39　5 人の客がホテルのフロントにそれぞれコートをあずけ，帰りに，2 人だけがそれぞれ自分のコートを受けとり，残り 3 人がそれぞれ自分のコートと異なるコートを渡される場合の数は $\boxed{}$ で，すべての 5 人がそれぞれ自分のコートと異なるコートを渡される場合の数は $\boxed{}$ である。

（東北学院大－工）

40 (1) $x+y+z=8$ をみたす正の整数 x，y，z は $\boxed{}$ 組ある。 （神奈川大－工）

(2) サイコロを 4 回投げて k 回目に出た目を a_k ($k=1$，2，3，4) とする。
$a_1<a_2<a_3<a_4$ となる目の出方は $\boxed{}$ 通りある。また，$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4$ となる目の出方は $\boxed{}$ 通りある。 （福岡大－理）

41 1 から 20 までの番号を記入したカードが 1 枚ずつ計 20 枚が箱の中に入れてある。この箱の中からカードを 1 枚ずつ，もとに戻さないで，2 回とり出すことにする。1 回目にとり出した番号を x，2 回目にとり出した番号を y とするとき，$x<y$ となる場合は $\boxed{}$ 通りである。また，$2x<y$ となる場合は $\boxed{}$ 通りである。 （福岡大－理・工・薬）

42 (1) 男子 4 人と女子 6 人がいる。この 10 人の中から 5 人を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。

(ア) 男子 2 人と女子 3 人を選ぶ。

(イ) 男子を少なくとも 2 人選ぶ。

(2) 男子 5 人と女子 4 人がいる。この 9 人が次のように 3 人ずつ A，B，C の 3 室に入る方法は何通りあるか。

(ウ) A には男子だけが入る。

(エ) 3 室のうち，1 室には女子だけが入る。

(オ) 各室に女子が少なくとも 1 人入る。

(カ) 女子が 2 人ずつ 2 室に分かれて入る。 （兵庫医大）

43 異なる 3 つの箱に玉を分けるとき，次のような分け方は何通りあるか。玉を入れない箱があってもよい。

(1) 赤い玉が 5 個の場合

(2) 赤い玉が 5 個と白い玉が 2 個の場合 （日本大－生産工）

44 黄色，赤色，青色のカードがそれぞれ 6 枚ずつある。同じ色の 6 枚のカードにはそれぞれ 1 から 6 までの数字が書かれている。これら 18 枚のカードから続けて 5 枚抜きとり，これらのカードを左から右に並べる。このとき，

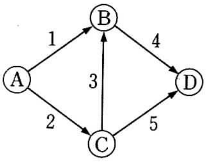
(1) 5 枚のカードがすべて黄色である順列は何通りできるか。

(2) 3 枚のカードが青色で，残りの 2 枚のカードが赤色である順列は何通りできるか。

(3) 5 枚のカードの数字の合計が 7 である順列は何通りできるか。

(4) 5 枚のカードの中の 3 枚が同じ数字で，残りの 2 枚も同じ数字である順列は何通りできるか。 （大阪女大）

45 右の図において，AからDは都市を表し，番号1から5のついた矢印は一方通行の道路を表す。このとき，道路が不通となり都市Aから都市Dへ行けない場合を考える。その場合のうちで，その不通区間のどの区間が開通してもAからDへ行けるようになる場合をすべて列挙せよ。 （都立科技大）



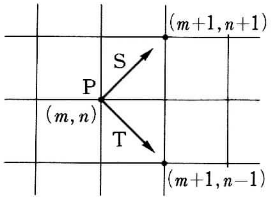
46 a，b，c，d，e，f，g，hの8文字すべてを並べるとき，次の順列の数を求めよ。

(1) 円周上に並べる場合

(2) 1列に並べ，a，bが隣り合う場合

(3) 1列に並べ，a，b間に他の文字が1個入る場合 （名古屋学院大－商）

47 xy 平面上の点 $\mathrm{P}(m,\ n)$ において，m と n がともに整数であるとき，点Pを格子点という。図のような格子点 $(m,\ n)$ から格子点 $(m+1,\ n+1)$ への移動をS，格子点 $(m+1,\ n-1)$ への移動をTとする。S，Tを適当にくり返すことによる格子点Pから格子点Qへの移動の仕方をPからQへの道とよぶ。



(1) 原点 $(0,\ 0)$ から点 $(8,\ 0)$ への道の個数を求めよ。

(2) 点 $(1,\ 1)$ から点 $(7,\ 1)$ への道のなかで，x 軸上の点を通る道の個数は，点 $(1,\ 1)$ から点 $(7,\ -1)$ への道の個数と等しいことを示せ。

(3) 点 $(1,\ 1)$ から点 $(7,\ 1)$ への道のなかで，x 軸上の点を通らない道の個数を求めよ。 （都立大－理系）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」14ページ

48 p を素数，n を p の倍数として，

$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，$A=\{x\,|\,x\in N,\ x$ は p の倍数$\}$

$B=\{x\,|\,x\in N,\ n$ を x で割った余りが p の倍数または $0\}$

$C=B\cap\overline{A}$ （$\overline{A}$ は全体集合 N での A の補集合）とする。

(1) $A\subseteqq B$ を示せ。

(2) $C\subseteqq\left\{x\,\middle|\,x\in N,\ x\leqq\dfrac{n}{p}\right\}$ を示せ。

(3) $p=5$，$n=95$ のとき，C の要素をすべてあげよ。 （滋賀医大）

49 $n>2$ とする。1から n までの n 個の数字を k 個の空でない部分に分割する方法の数を $S_n(k)$ で表す。例えば $n=3$, $k=2$ のとき分割は $\{1\}\cup\{2,3\}$, $\{2\}\cup\{1,3\}$, $\{3\}\cup\{1,2\}$ となるので，$S_3(2)=3$ である。

(1) $S_n(n-1)$ を求めよ。

(2) $S_n(n-2)$ を求めよ。

(3) $S_n(2)$ を求めよ。

(4) $k>1$ のとき，$S_{n+1}(k)$ を $S_n(k-1)$ と $S_n(k)$ を用いて表せ。 （九大－理系）

50 数字 1，2 を用いてできる 4 桁の自然数全体の集合を X とし，数字 1, 2, 4 を用いてできる 4 桁の自然数全体の集合を Y とする。また，3 の倍数全体の集合を Z とする。X の要素 x_1 と x_2 に対し，x_1 と x_2 の各桁ごとの積をとってできる Y の要素を $x_1 \circ x_2$ と表すことにする。

(例：$1122 \circ 1221 = 1242$)

(1) $X \cap Z$ の要素をすべて求めよ。

(2) $Y \cap Z$ の要素の個数を求めよ。

(3) $1122 \circ x \in Z$ となるような X の要素 x をすべて求めよ。

(4) X の部分集合 A で次の条件(a)，(b)，(c)を同時にみたすものを 1 つ求めよ。

(a) A の要素の個数は 4

(b) $1111 \in A$

(c) $x_1 \in A$，$x_2 \in A$，$x_1 \neq x_2$ ならば $x_1 \circ x_2 \in Z$

(5) 上の条件(a)，(b)，(c)を同時にみたし，さらに $1122 \in A$ をみたす X の部分集合 A をすべて求めよ。

（東京医歯大）

51 実数の集合 A_n を $A_n = \{x \mid n < x^n < n+1\}$ によって定める。集合 A_1，A_2，…，A_n の共通部分 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ が空集合でない最大の n を求めよ。

（名大－文系）

52 平面上に 11 個の異なる点がある。このとき，2 点ずつを結んでできる直線が全部で 48 本であるとする。

(1) 与えられた 11 個の点のうち 3 個以上の点を含む直線は何本あるか。また，そのおのおのの直線上に何個の点が並ぶか。

(2) 与えられた 11 個の点から 3 個の点を選び三角形をつくるとき，全部で何個できるか。

（熊本大－理系）

53 n は正の整数とする。

(1) 10 円玉と 50 円玉を組み合わせて合計 $(50 \times n)$ 円にするには $(n+1)$ 通りの方法があることを示せ。

(2) 10 円玉，50 円玉，100 円玉を組み合わせて合計 $(100 \times n)$ 円にするためには何通りの方法があるか。

(3) 10 円玉，50 円玉，100 円玉，500 円玉を組み合わせて合計 1 万円にするには何通りの方法があるか。

（阪大－法・経済）

54 $n \geqq 3$ とする。1，2，…，n のうちから重複を許して 6 個の数字を選び，それを並べた順列を考える。このような順列のうちで，どの数字もそれ以外の 5 つの数字のどれかに等しくなっているようなものの個数を求めよ。

（京大－理系）

55 1, 2, 3 の数字のみでできた n 桁の整数で，同じ数字が隣り合わないものを要素とする集合を $M(n)$ とする。また，$M(n)$ の要素の中で，数字 1 をちょうど k 個含む整数の個数を $a(n, k)$ とおく。

(1) $M(3)$ を求めよ。

(2) $a(n, 0)$ および $a(n, 1)$ を求めよ。

(3) $a(n, 2)$ を求めよ。

(埼玉大－理工)

56 赤色，白色，青色，黄色の 4 つの球が 1 つの袋に入っている。その袋から無作為に球を 1 つとり出したとき，xy 平面上の動点 P を，赤色の球なら x 軸方向に 1，白色の球なら x 軸方向に -1，青色の球なら y 軸方向に 1，黄色の球なら y 軸方向に -1 だけ移動する。ただし，動点 P は原点から出発し，とり出した球はそのつど袋に戻すものとする。球を n 回とり出して動点が点 (a, b) に行く道順の総数を $C_n(a, b)$ で表す。

(1) $C_4(1, 1)=\boxed{}$ である。

(2) 球を 4 回とり出したとき，点 P が領域 $D=\{(x, y)\,|\,y \geqq x^2\}$ に入っている道順の総数は $\boxed{}$ である。

(3) $C_n(1, 0)=({}_5C_2)^2=100$ ならば，$C_{n+1}(2, 0)=\boxed{}$ である。

(東洋大－工)

57 サイコロを続けて n 回ふる。このとき，サイコロの目の出方について考える。

目の出方は全部で $\boxed{}$ 通りある。1 の目が 1 回も出ない目の出方は $\boxed{}$ 通りあり，1 の目も 2 の目も 1 回も出ない目の出方は $\boxed{}$ 通りある。したがって，1，2 の少なくとも一方の目が 1 回も出ない目の出方は $\boxed{}$ 通りある。また，1 の目も 2 の目も 3 の目も 1 回も出ない目の出方は $\boxed{}$ 通りあり，したがって，1，2，3 の少なくとも 1 つの目が 1 回も出ない目の出方は $\boxed{}$ 通りある。

以上のことから，1 の目も 2 の目も少なくとも 1 回は出る目の出方は $\boxed{}$ 通りあり，1，2，3 の中のどの目も少なくとも 1 回は出る目の出方は $\boxed{}$ 通りあることがわかる。

(関西学院大－理)

58 2 種類の文字 a，b を用いて順列をつくるとき，同じ文字のつづきを連という。

例えば aabbbabaa や abbaaabba では，a の連が 3 個，b の連が 2 個で，連の総数は 5 である。m 個の a と n 個の b を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ。ただし，$n>m \geqq 2$ とする。

(1) 連の総数が 3 である順列は何通りできるか。

(2) 連の総数が 4 である順列は何通りできるか。

(3) a の連の個数が w であるとき，b の連の個数はどんな値をとるか。起こりうるすべての値を書け。ただし，$2 \leqq w \leqq m$ である。

(4) 連の総数が $2r$（偶数）である順列は何通りできるか。ただし，$1 \leqq r \leqq m$ である。

(5) 連の総数が $2r+1$（奇数）である順列は何通りできるか。ただし，$1 \leqq r \leqq m$ である。

(大阪女大)