13 三角関数

入試対策 この節での中心は加法定理とその応用である。関数としての性質ー最大・最小や方程式，不等式などに関係するものと，図形についての応用の2つに大別できる。数多い三角関数の公式のうちで，とくに加法定理とその応用がどのくらいマスターできているかによって問題が解けるかどうか決定する。統一的な手法はない。個々の問題について処理方法を完全に把握し，それが血となり肉となって有機的に働くようになるまで，練習を積み重ねる以外にない。

1st step

☞解答は「考え方と解答」85ページ

343 (1) $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=7$ のとき，$\tan 2\theta=\boxed{}$ である。 (大阪電通大)

(2) $\tan x+\tan y=30$，$\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}=50$ のとき，$\tan(x+y)=\boxed{}$ である。 (早大ー教育)

344 実数 x が方程式 $\sin^4 x-6\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=0$ をみたすとする。

(1) $\sin^2 x\cos^2 x$ の値を求めよ。

(2) $0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$ の範囲で x の値をすべて求めよ。 (広島大ー文系)

345 $\sin 18^\circ$ と $\sin 54^\circ$ を次のように求めよう。$\theta=18^\circ$ として，$a=\sin\theta$，$b=\sin 3\theta$ とおく。

$$\text{公式：}\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

を用いて，$b-a$ を a，b を用いて表せば，$b-a=2\boxed{}$ …①

b を a で表せば，$b=\boxed{}$ …②

①，②より，b を消去して a についての2次方程式 $4a^2+\boxed{}=0$ をえる。

よって，$\sin 18^\circ=\dfrac{\boxed{}}{4}$ これを①に代入して，$\sin 54^\circ=\dfrac{\boxed{}}{4}$ (芝浦工大)

346 $A+B+C=180^\circ$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$$ (福井医大)

347 任意の x に対して，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\cos^3 x-\sin^3 x+\cos x-\sin x+\sin x\cos x\leqq 2$$ (長崎大)

348 $\triangle ABC$ において，$\angle A=60^\circ$ であるとき，$\cos B+\cos C$ と $\cos B\cos C$ のとりうる値の範囲は次のようになる。

$$\frac{1}{\boxed{}}<\cos B+\cos C\leqq 1,\quad \frac{1}{\boxed{}}<\cos B\cos C\leqq\frac{1}{\boxed{}}$$

（中部大－工）

349 θ が方程式 $\sin 3\theta=\cos 2\theta$ をみたすとき，

(1) $\sin\theta$ の値を求めよ。

(2) θ の正の最小値を求めよ。

(3) $\sin 18^\circ$ および $\sin 36^\circ$ の値を求めよ。（信州大－理）

350 (1) $x+y=150^\circ$，$\tan x+\tan y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を同時にみたす x，y を求めよ。ただし，$-180^\circ<x<180^\circ$，$-180^\circ<y<180^\circ$ とする。（帯広畜産大）

(2) $0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ のとき，不等式 $\sin^4\theta+\cos^4\theta\geqq\cos^2 2\theta+\dfrac{1}{4}$ をみたす θ の範囲を求めよ。（東邦大－理）

351 $f(\theta)=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta$ とする。

(1) $f(\theta)=\boxed{}+\boxed{}\sin(2\theta+\alpha)$ と表したとき，$\tan\alpha=\boxed{}$ であり，したがって，$\tan 3\alpha=\boxed{}$ である。

(2) $0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ のとき，$f(\theta)$ の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。（慶大－総合政策）

352 (1) $0<a<1$ のとき，$2a\sin x-\cos^2 x$ の最小値が $-\dfrac{65}{49}$ であるならば，$a=\boxed{}$ である。

(2) $\sin x+\cos x=\boxed{}\sin(x+\boxed{}^\circ)$ と変形できるから，$0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ における $\sin x+\cos x$ の最小値は $\boxed{}$ である。

(3) $b<0$ のとき，$f(x)=b(\sin x+\cos x)+3-b$ が $0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ において，$|f(x)|\leqq 4$ をみたすならば，b のとりうる最小の値は $\boxed{}$ である。（東北工大）

353 $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ を定義域とする θ の関数 $x=\sin\theta+\cos\theta$ と $y=\sin\theta\cos\theta$ を考える。

(1) y を x の関数として表し，その定義域を示せ。

(2) $f(\theta)=\sin^3\theta+\sin^2\theta\cos\theta-3\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta+\cos^3\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を x の関数として表せ。

(3) $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。また，それらを与える θ に対する $\sin\theta$ および $\cos\theta$ の値を求めよ。（神戸学院大－薬）

354 方程式 $\sin x+2\sin x\cos x+\cos x+a=0$ が解をもつような定数 a の範囲を求めよ。
（東邦大－理）

355 変数 x，y が $x^2+y^2=1$ をみたしているとき，平面上の点 $(x^2-y^2+2x,\ 2y-2xy)$ と原点との距離の最大値はいくらか。また，そのときの $(x,\ y)$ をすべて求めよ。（山口大－文系）

356 xy 平面上を動く 2 点 P，Q がある。時刻 t における P，Q の位置はそれぞれ $(\cos t,\ \sin t)$，$(3+\cos 2t,\ \sin 2t)$ である。
(1) 点 P，Q はそれぞれどんな曲線上を動くか。
(2) 時刻 t における 2 点 P，Q 間の距離の 2 乗を $\cos t$ の関数として表せ。
(3) P，Q 間の距離の最大値および最小値を求めよ。（東京理大－基礎工）

357 半径 R の円に内接する二等辺三角形 ABC の底角を β とする。（ただし，AB＝AC とする。）
(1) △ABC の面積 S および周の長さ l を R と β を用いて表せ。
(2) $x=\dfrac{S}{Rl}$ とし，x のとりうる値の範囲を求めよ。
(3) $\sin\beta+\cos\beta$ が最大となる x の値を求めよ。（佐賀大－理工）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」89 ページ

358 $3\cos 2\theta+4\sin 2\theta=k$ のとき，$\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}$ を k を用いて表せ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ とする。
（福井工大）

359 すべての実数 x に対して，$\cos(x+\alpha)+\sin(x+\beta)+\sqrt{2}\cos x$ が一定になるような α，β を求めよ。ただし，$0^\circ<\alpha<360^\circ$，$0^\circ<\beta<360^\circ$ とする。（岐阜大）

360 $\alpha=\cos 3\theta$，$A=\cos\theta$，$B=\cos(\theta+120^\circ)$，$C=\cos(\theta-120^\circ)$ とおく。
(1) $A^2+B^2+C^2$ を求めよ。
(2) $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}$ を α で表せ。（学習院大－経済）

361 △ABC について，
(1) $\cos A\cos B \leqq \dfrac{1}{2}(1-\cos C)$ を証明せよ。
(2) A，B，C が変化するとき，$\cos A\cos B\cos C$ の最大値を求めよ。（東京慈恵会医大）

362 正の定数 a を含む2次方程式 $x^2+\dfrac{3a}{4a+1}x+\dfrac{1}{4a+1}=0$ の2つの解が $\cot\alpha$, $\cot\beta$ $(-90^\circ<\alpha<90^\circ,\ -90^\circ<\beta<90^\circ)$ であるとき，

(1) $\tan\alpha+\tan\beta$, $\tan\alpha\tan\beta$ の値を a を用いて表せ。

(2) $\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(3) $\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の値を求めよ。

(鳥取大－教育)

363 方程式 $2(\sin^3x-\cos^3x)+3(\sin x-\cos x)-4=0$ について，

(1) $t=\sin x-\cos x$ とおき，上の方程式を t で表せ。

(2) 与えられた方程式は，$0^\circ\leqq x\leqq180^\circ$ においてただ1つの解 $x=\alpha$ をもつことを示せ。

(3) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ の値を求めよ。

(愛媛大)

364 $0^\circ<\alpha<180^\circ$ のとき，$\sin3\alpha=\sin2\alpha$ をみたす α と，その α に対する $\cos\alpha$ の値を求めよ。

(武蔵工大)

365 $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$, $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ とする。$\sin\alpha=\dfrac{63}{65}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\gamma=\boxed{}$, $\cos\gamma=\boxed{}$ となる。

原点Oを中心とする単位円と始線OXを定める。OXとのなす角がそれぞれ α, β, γ となる動径と単位円との交点をA，B，Cとする。このとき $\mathrm{AB}=\dfrac{\boxed{}}{\sqrt{325}}$, $\mathrm{BC}=\dfrac{\boxed{}}{\sqrt{65}}$ となる。

また，△ABCの面積 S は $S=\dfrac{\boxed{}}{4225}$ で与えられ，$S=\boxed{}\,\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}$ をみたす。

(慶大－理工)

366 円に内接し，$\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{BC}=2$, $\mathrm{CD}=1$, $\mathrm{DA}=3$ である四角形ABCDがある。

(1) $\cos\angle\mathrm{DAB}$ および $\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{DAB}$ の二等分線と辺BCとの交点をEとするとき，線分BEの長さを求めよ。

(防衛大－理系)

367 Oを原点とする xy 平面上に3点A(5, 0)，B(5, 4)，C(0, 4) がある。Oを通り互いになす角が45°である2直線が線分AB，BCとそれぞれP(5, y)，Q(x, 4) で交わるものとする。

(1) y を x で表せ。

(2) x の範囲を求めよ。

(3) △OPQの面積の最小値と，そのときの∠POAの大きさを求めよ。

(関西大－工)

368 座標平面上に原点Oを中心とする半径1の円 C_1 と半径2の円 C_2 がある。2点P，Qがそれぞれ点A(1，0)，B(2，0)を同時に出発して，同じ速さで C_1，C_2 上を時計の針と反対向きに動くものとする。

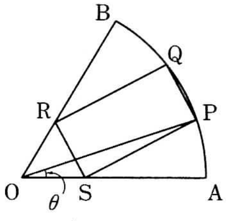
(1) 動径OP，OQがある時刻までに回転した角の大きさをそれぞれ α，β とするとき，α と β の関係を求めよ。

(2) 点Pが C_1 上を1周する間に，△OPQが二等辺三角形になるときのP，Qの座標を求めよ。 （東京学芸大）

369 半径1，中心角60°の扇形OABがある。図のように，弧AB上に2点P，Q，線分OA上に点S，線分OB上に点Rを四角形PQRSが長方形になるようにとる。

(1) ∠AOP＝θ とするとき，線分OSの長さを θ で表せ。

(2) 長方形PQRSの面積を最大にする θ およびそのときの面積を求めよ。 （岐阜大）



370 (1) $\tan 80^\circ \tan 20^\circ = 3\tan 50^\circ \tan 30^\circ$ を示せ。

(2) △ABCで，∠CAB＝50°，∠ABC＝30°であるものを考える。頂点Cから辺ABへおろした垂線の足をPとし，PCの延長上に点Qを∠QAC＝30°となるようにとる。このとき，∠BQAを求めよ。 （お茶の水女大－文系）

371 △ABCにおいて，辺ABの長さを1，∠C＝θ，∠B＝3θ とする。

(1) θ のとりうる範囲を求めよ。

(2) 2辺BC，CAの長さを θ で表せ。

(3) △ABCの周の長さ l のとりうる値の範囲を求めよ。 （筑波大）

372 △ABCにおいて，∠CAB＝x，∠ABC＝y とする。

(1) $\sin(2x+2y)+\sin 2x=0$ のとき，△ABCはどんな三角形か。

(2) $\sin(2x+2y)+\sin 2x>0$ のとき，2辺AB，BCの大小関係を調べよ。 （島根大－理系）

373 実数 a に対し，$v=\sqrt{3}(\sin 2x-2a\sin x)-(\cos 2x+2a\cos x)+a$ の最小値を $m(a)$ とする。

(1) $t=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ とおくとき，v を t を用いて表せ。

(2) $m(a)$ を求めよ。

(3) $y=m(x)$ のグラフをかけ。 （慶大－経済）

14 指数関数，対数関数

入試対策 指数関数，対数関数はもともといろいろな問題を解く際の道具となるもので，それだけの問題はあまり多くない。それも問題が出しつくされた感じで，以前より減ってきている。しかし，道具としての重要性は少しも失われていない。関数として，あるいは方程式，不等式として出されている。指数と対数の相互関係に十分注意して基礎をしっかり身につければ，難問は少ないので手掛かりは得られるはずである。

1st step

☞解答は「考え方と解答」93 ページ

374 $x=\frac{1}{3}(2^{\frac{1}{n}}-2^{-\frac{1}{n}})$ のとき，$\left\{\frac{3}{2}\left(x+\sqrt{\frac{4}{9}+x^2}\right)\right\}^n$ の値は $\boxed{}$ である。ただし，n は正の整数とする。 (神奈川大－経済)

375 (1) $a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ は $ab=64$，$3\log_a b+2\log_b a=7$ をみたす。ただし $a>b$ である。 (関西学院大－経済)

(2) x，y はいずれも 2 以上の自然数であって，$\log_x(y-3)+1=2\log_{x^2}(y+3)$ をみたす。このとき $(x,\ y)$ は $(\boxed{},\ \boxed{})$，$(\boxed{},\ \boxed{})$，$(\boxed{},\ \boxed{})$，$(\boxed{},\ \boxed{})$ のいずれかである。 (慶大－総合政策)

376 4^{100} は $\boxed{}$ 桁の数であり，$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ は小数第 $\boxed{}$ 位にはじめて 0 でない数字が現れる小数である。次に，$(1.25)^n$ の整数部分が 4 桁となる自然数 n の範囲は $\boxed{}\leqq n\leqq\boxed{}$ である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。 (西南学院大)

377 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2(5\cdot 2^{x+1}-1)=2x+4$ (久留米大－医)

(2) $\log_a(2a^2-x^2)\geqq 1+\log_a x$ （a は正の定数で，$a\neq 1$） (岡山理大)

(3) $x^2+|\log_5 y|=3$，$|x|+\log_5\sqrt{y}=2$ (湘南工大)

378 $1<a<b<a^2$ のとき，$\log_a b$，$\log_b a$，$\log_a\left(\frac{a}{b}\right)$，$\log_a\left(\frac{b}{a}\right)$，0，$\frac{1}{2}$，1 を小さいものから大きなものへの順に並べよ。 (自治医大)

379 (1) 2次方程式 $4x^2-4\sqrt{19}x+13=0$ の2つの解を α, β とするとき, $\log_2(\alpha^2+6\alpha\beta+\beta^2)$ の値を求めよ。

(2) 変数 x, y が $x+3y=12$ をみたすとき, $\log_3 x+\log_{27} y$ の最大値を求めよ。 (信州大－工)

380 (1) 不等式 $\log_3(x+1)<2$ をみたす x の値の範囲を求めよ。

(2) (1)の x の値の範囲において, 次の x の関数のとりうる値の範囲を求めよ。

$$f(x)=\{\log_3(x+2)\}^2-\log_3(x^3+6x^2+12x+8)$$

(弘前大)

381 (1) $-1\leqq x\leqq 2$ のとき, 関数 $f(x)=3\cdot 4^x-8^{x+\frac{1}{3}}$ の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ。 (和歌山大－教育)

(2) $x\geqq 10$, $y\geqq 10$, $xy=10^3$ のとき, 次の各式の最大値と最小値, およびそのときの x, y の値を求めよ。

(ｱ) $(\log_{10}x)(\log_{10}y)$ (ｲ) $\log_x y$ (鳥取大－医・工)

382 連立方程式 $y^2 10^{1+\log_{10}x}=10^{2+\log_{10}5}$, $2^{2x+y}=8^{y-x}$ の解は $x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$ である。また, このとき $\dfrac{(x+y)^{y-x}}{x^y-y^x}=\boxed{}$ である。 (西南学院大)

383 $\log_{10}7$ の近似値は 0.8451 である。ある整数 x に対して 7^x が15桁の整数となるとき, 7^x の1位の数字は $\boxed{}$ で, 7^x の 10^{14} 位の数字は $\boxed{}$ である。 (東京理大－理)

384 不等式 $1000^x<x^{2x}$ をみたす最小の正の整数 x は $\boxed{}$ であり, $5^{y+10}<2^{4y}$ をみたす最小の正の整数 y は $\boxed{}$ である。ただし, $\log_{10}2=0.3010$ とする。 (福岡大－商)

385 次の2つの不等式を同時にみたす x の範囲を求めよ。

$$\log_3 x+\log_3(x-2)<1,\quad \log_{\frac{1}{2}}(x+5)+\log_2(4-x)+\log_2 2x<0$$

(甲南大－理)

2nd step

☞解答は「考え方と解答」96 ページ

386　a，b，c を1でない正の数とし，$\log_a b+\log_b c+\log_c a=\dfrac{1}{2}$，$\log_b a+\log_c b+\log_a c=-\dfrac{5}{2}$ とする。このとき

(1)　$(\log_a b)(\log_b c)(\log_c a)=\boxed{}$

(2)　$(\log_a b)^2+(\log_b c)^2+(\log_c a)^2=\boxed{}$

(3)　$(\log_b a)^3+(\log_c b)^3+(\log_a c)^3=\boxed{}$　　（日本大－生産工）

387　$f(x)=2^{3x}-2^{2x+2}-3\cdot2^x+12$ とする。方程式 $f(x)=0$ の解を求めると $x=\boxed{}$ と $x=\boxed{}$ である。また，方程式 $f(x)=b$ が解をもたないような b の範囲を求めると $\boxed{}$ で，負の解をもつような b の範囲を求めると $\boxed{}$ となる。　　（慶大－経済）

388　座標平面上で，$6\log_{a+y}x+3\log_{a-y}x^2=(\log_{a+y}x^3)(\log_{a-y}x^4)$ $(a>1)$ をみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ。　　（岡山理大）

389　$x^4y^3=32$ $\left(\text{ただし，}x\geqq\sqrt{2},\ y\geqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，次の(1)，(2)の最大値および最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

(1)　$\log_2 xy$　　(2)　$\log_x y$　　（東京水産大）

390　数直線上の集合 A，B，C が次式によって与えられるとき，2つの集合 $\overline{A\cup B\cup C}$ と $\overline{A\cap B\cap C}$ を求めよ。（注．弧度法で $\pi=180^\circ$ である。）

$A=\{x\,|\,x^2-x-2>0\}$，$B=\{\theta\,|\,0\leqq\theta\leqq2\pi,\ \sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\geqq\sqrt{3}\}$，

$C=\{y\,|\,\log_2(3-y)\leqq1+\log_2 y\}$　　（大阪歯大）

391　(1)　n を自然数とするとき，$x=\dfrac{1}{4}(4^{\frac{1}{n}}+4^{-\frac{1}{n}})$ とおけば，$\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}$ は4の $\dfrac{1}{\boxed{}\,n}$ 乗である。よって，$n\log_2\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{2}}\right)=\boxed{}$ となる。

(2)　方程式 $x^{\log_3 x-2}=27$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$\log_3 x=X$ とおくと，与えられた方程式は $X^2-2X-\boxed{}=0$ となるので，$\alpha=\boxed{}$，$\beta=\boxed{}$ である。

また，$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\boxed{}$ となる。　　（東北工大）

392 a, b, c をそれぞれ1より大きな数とする。

(1) $\log_{ab}a+\log_{bc}b+\log_{ca}c>1$ を示せ。

(2) $\log_{ab}a+\log_{bc}b+\log_{ca}c<2$ を示せ。

(3) $\log_{ab}a+\log_{bc}b+\log_{ca}c=\dfrac{3}{2}$ となるための必要十分条件を求めよ。 (東北大－理系)

393 不等式 $2(\log_x y)^3-3(\log_x y)^2+\dfrac{1}{\log_y x}<0$ が成り立つとき,

(1) $\log_x y$ はどのような範囲の値をとるか。

(2) この不等式をみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ。 (帯広畜産大)

394 m を2より大きい実数とする。x の2つの方程式

$$x^2-2^{m+1}x+3\times2^m=0 \quad \cdots① \qquad 2\log_2 x-\log_2(x-1)=m \quad \cdots②$$

について,

(1) 方程式①, ②のそれぞれは, 2つの異なる実数解をもつことを示せ。

(2) 方程式①の解のうち, ちょうど1つだけが方程式②の2つの解の間にあることを示せ。

(北大－理系)

395 a, b は実数で, $a>0$, $a\neq1$ とする。曲線 $y=\log_a bx$ と曲線 $y=a^x+b$ が直線 $y=x+2$ 上で整数を座標にもつ2点で交わる。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 交点の座標を求めよ。 (千葉大)

396 半径1の円 O_1 に内接する正六角形に内接する円を O_2 とする。円 O_2 に内接する正六角形に内接する円を O_3 とする。以下同様に, 円 O_i に内接する正六角形に内接する円を O_{i+1} $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。円 O_i の面積を S_i とするとき,

(1) S_i を求めよ。

(2) S_i が 0.00005 より小さくなる最小の自然数 i を求めよ。ただし, 円周率を π とするとき, $\log_{10}\pi=0.4971$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}5=0.6990$ とする。

(3) 数列 S_1, S_2, S_3, $\cdots$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。 (山形大－人文)

397 A地点からB地点に向かって, 第1日目は全行程の $\dfrac{1}{3}$ を進み, 第2日目は残りの行程の $\dfrac{1}{3}$ を進む。このように, 毎日残った行程の $\dfrac{1}{3}$ を進んで行くと, 何日目に全行程の $\dfrac{49}{50}$ を超えるか。($\log_{10}2=0.301$, $\log_{10}3=0.477$ として用いてよい。) (関西大－法)