15 微分法，接線・法線

入試対策 関数の極限や $f'(x)$ を求めるものは，大きな問題としては出ない。微分の大きな山は接線・法線にからんだ性質を利用するものである。接線だけが単独に出るのではなく，極限や軌跡，それと面積を結びつけたものが多く，ここで微分の基本性質の理解を問うている。したがって，このタイプの問題は〝こう考えよう〟という手法を多く身につける必要がある。計算力重視はいうまでもない。

1st step

☞解答は「考え方と解答」99ページ

398 (1) 次式が成り立つような定数 a，b，c は $a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ である。ただし，b は正の整数で，c は0でない実数である。

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-7x^2+(14-a)x-5}{(x-1)^b}=c$$

（南山大－経済）

(2) 次式が成り立つように定数 a，b，c を定めよ。

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{(1+x)^3}-(a+bx)}{x^2}=c$$

（宮崎大－工・教育）

399 4次の整式 $f(x)$ について，

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=a,\quad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=b,\quad \lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=c$$

が成り立つとき，実数 a，b，c の間の関係式を求めよ。（熊本大－工・教育・経済）

400 a を正の定数とする。曲線 C：$y=x^3$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^3)$ における C の接線を l とし，点Aを通り，l とは異なる C の接線を m とするとき，

(1) l の傾きを a を用いて表せ。

(2) m の傾きを a を用いて表せ。

(3) l と m のなす角を θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とするとき，$\tan\theta$ を a を用いて表せ。

(4) $\tan\theta$ の最大値を求めよ。また，このときの a の値を求めよ。（千葉工大）

401 放物線 $y=x^2$ 上の動点Pにおけるこの放物線の接線と y 軸の交点をQとする。Pが原点と異なるとき，線分PQの垂直二等分線はつねに y 軸上の定点を通ることを証明せよ。

（佐賀大－教育・農）

402　3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とするとき，$f(x)-g(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ。

（京都教育大）

403　2つの曲線 $y=-3x^2+8x-9$ …①，　$y=x^2+8x+13$ …②　がある。①および②の曲線上にそれぞれ点P，Qをとり，その x 座標をそれぞれ a，b とする。

(1)　Pにおける接線の方程式を a を用いて表せ。

(2)　Pにおける接線とQにおける接線とが平行であるための，a と b に関する条件を求めよ。

(3)　P，Qにおける平行な2つの接線と，2点P，Qを通る直線とが直交するように a，b の値を定め，これら2つの接線の方程式を求めよ。

(4)　2つの曲線上の点の最短距離を求めよ。　（九州歯大）

404　放物線 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 上の異なる2点A，Bにおける接線をそれぞれ l，m とし，l と m の交点をCとする。A，Bの x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，

(1)　直線 l と m の傾きの和は，直線ABの傾きの2倍に等しいことを証明せよ。

(2)　線分ABの中点とCを結ぶ直線は y 軸に平行であることを証明せよ。

(3)　$\triangle$ABCの面積を α，β を用いて表せ。　（大分大－工・教育）

405　放物線 $y=ax^2-b$ $(a\neq 0)$ と放物線 $y=-x^2$ との交点における接線が互いに直交するための必要十分条件を求めよ。　（日本女大－家政）

406　曲線 $y=x^3+ax+b$ は相異なる2点P，Qを通り，点Pにおける接線は直線 $y=-x$ で，点Qにおける接線は点Qにおいて，直線 $y=-x$ に直交する。

(1)　点Pの x 座標を p，点Qの x 座標を q とするとき，$q=-2p$ であることを証明せよ。

(2)　a，b の値を求めよ。　（名大－文系）

407　点A$(2,\ a)$ を通って曲線 $y=x^3$ に3本の接線がひけるような a の値の範囲を求めよ。

（京都教育大）

408　曲線 $y=x^2$ の2つの直交する法線の交点のえがく軌跡を求めよ。　（宇都宮大－農・教育）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」102ページ

409 座標平面において，原点Oを中心とする半径1の円をC_1とし，C_1上の定点$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$を第1象限にあるようにとる。正の実数$t$に対し，点$\mathrm{Q}(t,\ 0)$を中心とする半径1の円を$C_2$とする。

(1) 点PがC_2の内部にあるためにtがみたすべき条件を求めよ。

(2) (1)の条件のもとで直線PQと円C_2との交点のうち点Pの側にあるものをRとする。線分PRの長さをlとして，$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{2l-l^2}{t}$を求めよ。（九大－法・経済）

410 a，bを正とするとき，放物線$y=\dfrac{x^2}{a^3}+3a$，$y=\dfrac{x^2}{b^3}+3b$について，

(1) $a\fallingdotseq b$のとき，この2つの放物線の交点の座標（X，Y）をa，bで表せ。

(2) ここでbをaに近づけたときのX，Yのそれぞれの極限x，yを求めよ。次に，aを変化させたとき，点（x，y）はどのような曲線をえがくか，図示せよ。

(3) (2)の曲線と$y=\dfrac{x^2}{a^3}+3a$とは，その共通点において接線を共有することを示せ。

（同志社大－工）

411 $a_1=1$とし，実数の列a_2，a_3，… を次のように決める。曲線$y=x^2$上の点$\mathrm{P}_i(a_i,\ a_i{}^2)$における接線と$x$軸との交点$\mathrm{Q}_{i+1}$の$x$座標を$a_{i+1}$とする。

(1) $a_N\leqq10^{-6}$となる最小のNを求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$として計算せよ。

(2) $\triangle\mathrm{Q}_i\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_{i+1}$の面積を$S_i$とおく。和$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}S_i$を求めよ。ただし，点$\mathrm{Q}_1$の座標は$(1,\ 0)$とする。（愛媛大）

412 nを正の整数とし，曲線$y=x^2-8x+18$上の点$\mathrm{P}(n,\ n^2-8n+18)$における接線を$l$とする。また，曲線$y=x^2-8x+18$と接線$l$および$y$軸で囲まれた部分（境界も含む）に含まれる格子点の個数をNとする。

(1) 曲線$y=x^2-8x+18$と接線lおよびy軸で囲まれた部分（境界も含む）に含まれる格子点のうち，直線$x=k$（$k=0$，1，2，…，n）上にあるものの個数を求めよ。

(2) Nを求めよ。（新潟大－理系）

413 $f(x)$，$g(x)$はともにxについての整式であり，次数が等しい。これらがすべての実数xについて，2つの関係式

$$(1-x)f'(x)=f(x)+g(x)-15,\qquad (1-x)g'(x)=9\{f(x)-7\}+g(x)$$

を同時にみたし，かつ$f(0)=7$とする。このとき$f(x)$，$g(x)$は$\boxed{}$次式であり，最高次の係数はそれぞれ$\boxed{}$，$\boxed{}$である。また，$f(3)=\boxed{}$，$g(3)=\boxed{}$である。

（東京理大－薬）

414 次の 2 つの条件をみたす整数係数の多項式 $P(x)$ を定めよ。ただし，$P'(x)$ は $P(x)$ の導関数である。

(1) $P(0)$ は素数　　(2) $(x+3)P'(x)=2P(x)+8x-12$　　(関西大－商)

415 2 つの放物線 $y=x^2$ と $y=ax^2+bx+c$ とは 2 点で交わり，交点におけるこれら 2 つの放物線の接線は互いに直交するという。a，b，c が変化するとき，このような放物線 $y=ax^2+bx+c$ の頂点の全体はどのような集合をつくるかを調べ，その集合を図示せよ。　(名大－理系)

416 A は平面上において，方程式 $x^2+y=1$ で表される曲線とする。A 上の点 P の x 座標が t のとき，円 B は半径 $\sqrt{16t^2+4}$ で P において A と共通接線をもつとする。点 P が曲線 A 上を動くとき，円 B の中心の軌跡を表す方程式を求めよ。　(埼玉大－教育・経済)

417 原点を O とし，放物線 $y=x^2$ 上に O と異なる 2 点 A，B をとる。3 点 O，A，B において放物線 $y=x^2$ に接線をひく。これら 3 本の接線によって囲まれる三角形の外接円は，つねにある定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ。　(早大－商)

418 C を方程式 $y=x^3-x$ によって表される曲線とし，L を点 $(1,\ 0)$ における C の接線とする。

(1) P を L 上の点とし，T を C 上の点とする。このとき，T における C の接線が P を通るための必要十分条件を，P の x 座標 p と T の x 座標 t を用いて表せ。

(2) L 上の点 P で，P から C に 3 本の接線がひけるような点の，x 座標 p の範囲を求めよ。

(3) 点 P が L 上を，P から C に 3 本の相異なる接線がひけるという条件をみたしながら動くときの，P から C にひいた 3 本の接線の接点を頂点とする三角形の重心の軌跡を求めよ。　(東京理大－理)

419 平面上に点 P と曲線 $y=x^3-4x$ がある。点 P からこの曲線にただ 1 つの接線しかひけないとき，点 P の存在範囲を図示せよ。　(中部大－工)

420 曲線 $y=x^3-x$ の接線で点 $(a,\ b)$ を通るものがちょうど 2 本存在する。

(1) a，b のみたすべき条件を求めよ。

(2) その 2 本の接線が直交するときの a，b の値を求めよ。　(一橋大)

16 極値，最大・最小

入試対策 関数の極大・極小とグラフ，最大・最小の問題は，微分の応用として最も重要で，とくに数学IIまでが範囲の文系では必ず出題される。基本的には，微分→増減表→関数値の変化を見る…ということであるが，式の計算量が多く，どうしてもある程度の速い計算が要求される。その点を意識してノートに練習を積み重ねることが必要である。文字の値によって場合を分けることが多いので，この点を注意したい。

1st step

☞解答は「考え方と解答」105 ページ

421 $f(x)=8^x-4^{x+1}+2^{x+2}-2$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値を求めたい。$2^x=t$ とすると，
$f(x)=\boxed{}\,t^3+\boxed{}\,t^2+\boxed{}\,t+\boxed{}$ となり，最大値は $\boxed{}$ である。 （共立薬大）

422 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が単調増加関数であるとき，
(1) a と b の関係を求めよ。
(2) $f(1)=1$ であるとき，c の最大値を求めよ。また，このとき方程式 $f(x)=0$ は -1 と 0 の間に解をもつことを示せ。 （九州芸工大）

423 3次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3ax$ （a は実数）は極大値と極小値をもち，$y=f(x)$ のグラフ上で，極大となる点をA，極小となる点をBとする。
(1) 線分ABの中点 $\mathrm{M}(p,\ q)$ の座標を a で表せ。
(2) a が変化するとき，中点 $\mathrm{M}(p,\ q)$ の軌跡を求め，そのグラフをかけ。 （熊本女大）

424 関数 $f(x)=x^3-2x^2-3x+4$ の，区間 $-\dfrac{7}{4}\leqq x\leqq 3$ での最大値と最小値を求めよ。 （東大－文科）

425 3次関数 $f(x)$ は $x=1$ で極小値 0，$x=-3$ で極大値 32 をとる。
(1) $f(x)$ を求めよ。
(2) 点 $\mathrm{A}(0,\ f(0))$ における曲線 C：$y=f(x)$ の接線 l が再び C と交わる点をBとする。点Pが C 上をAからBまで動くとき，Pと l の距離の最大値を求めよ。 （東北大－文系）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」108 ページ

433 曲線 $y=x^3-6x^2+9x$ …① を x 軸の負の方向に a $(a>0)$，y 軸の負の方向に $b\,(b>0)$ だけ平行移動した曲線の方程式を $y=f(x)$ …② とする。曲線①，②は異なる 2 点 $(-1,\ -16)$ と $(c,\ d)$ で交わるものとする。

(1) 関数 $f(x)$ は $x=\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}$ で極小値 $\boxed{\text{ウエ}}$ をとり，$x=\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}$ で極大値 $\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}$ をとる。

(2) b，c を a で表すと，$b=a^3-\boxed{\text{ケ}}a^2+\boxed{\text{コサ}}a$，$c=\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}$ である。

(3) $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，$f(x)\leqq -16$ となるための必要十分条件は

$\boxed{\text{セ}}\leqq a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。 （センター試験）

434 関数 $f(x)=x^3+3ax^2+2bx+c$ に対し，$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(1,\ -3)$ における接線は点 $(-2,\ 0)$ を通り，かつ $f(x)$ は $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとることとする。このとき，

(1) $\alpha+\beta=\boxed{}a$，$\alpha\beta=\boxed{}b$ となり，$f(\alpha)+f(\beta)$ は a を用いて $f(\alpha)+f(\beta)=\boxed{}a^3+\boxed{}a^2+\boxed{}a$ と表される。

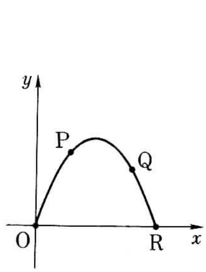
(2) $f(\alpha)+f(\beta)=-6$ をみたすとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ となり，また $\alpha=\boxed{}$，$\beta=\boxed{}$ となる。 （近畿大－理工）

435 曲線 $y=(x-3)^2$ 上の点 $(a,\ (a-3)^2)$ における接線と x 軸および y 軸で囲まれた三角形の面積を $S(a)$ とする。ただし，このような三角形が存在しないときは $S(a)=0$ とおく。

(1) 関数 $S(a)$ のグラフの概形をかけ。

(2) 三角形が第 1 象限にできるときの $S(a)$ の最大値を求めよ。 （名古屋市大－経済）

436 点 P，Q は関数 $y=3x-x^2$ $(0<x<3)$ のグラフ上を動くとする。点 O $(0,\ 0)$，P，Q，R$(3,\ 0)$ が図のように時計の針が回る方向に順に並んでいるとき，



(1) 点 P を固定したとき，△PQR の面積が最大になる点 Q の座標を t を用いて表せ。ただし，t は点 P の x 座標とする。

(2) 四角形 OPQR の面積の最大値を求めよ。 （日本大－理工）

437 $a>0$ とし，$f(x)=x^3+3(1-a)x^2-12ax$ とする。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $-3\leqq x\leqq 4a$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ。 （大阪市大－生活科学）

438 3次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ は極大値と極小値をもち，それらを区間 $-1\leqq x\leqq 1$ 内でとるものとする。この条件をみたすような実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

(東大－文科)

439 a は定数で，$0<a<1$ とする。変数 x，y が $ax+y=1$ および $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ をみたしているとき，x^3+y^3 の最大値を求めよ。 (埼玉大－教育・経済)

440 単位円 $x^2+y^2=1$ に直線 $px+qy=1$ $(p>0,\ q>0)$ が接している。この接線と x 軸，y 軸とで囲まれた三角形を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V とする。接線をいろいろ変えたときの V の最小値を求めよ。また，そのときの接点の座標を求めよ。

(京大－文系)

441 1辺の長さが2の正三角形ABCがある。Aからの距離が x でBCに平行な直線を l とする。

(1) l が△ABCと交わるとき，この三角形の l についての回転体の体積を x の式で表せ。

(2) この回転体の体積の最小値を求めよ。 (九州歯大)

442 A, Bが数直線 l 上を動くとする。出発時刻を $t=0$ とし，時刻 t におけるAとBの位置をそれぞれ $y=f(t)$，$y=g(t)$ とする。ただし，

$$f(t)=4t^3-12t^2+8t,\quad g(t)=4t^2-4t,\quad t\geqq 0$$

(1) A，Bが出発してから最初に出会う(位置が同じになる)時刻を求めよ。

(2) $y=25$ の位置に最初に達するのはどちらか。

(3) 出発してから2度目に出会うまでに，A，Bの位置が最も開く時刻を求めよ。

(名古屋市大－経済)

443 x の3次関数 $f(x)=x^3-ax^2+bx-c$ がある。方程式 $f(x)=0$ の3つの解が $\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\sin\theta\cos\theta$（ただし，$0^\circ\leqq\theta<180^\circ$）のとき，

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の最小値を θ の関数とみて $g(\theta)$ とおくとき，$g(\theta)$ を $\sin 2\theta$ を用いて表せ。

(2) (1)で求めた関数 $g(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。 (和歌山大)

444 $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sin^n\theta+\sum_{n=1}^{3}\cos^n\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。 (信州大－理)