さくらの個別指導
25.07.14
さくら教育研究所

17　積分法

入試対策　不定積分についての問題はほとんどない。定積分を題材とする問題は，形式はいろいろで，係数の決定，グラフ，最大・最小などがある。数学IIの範囲では関数が整関数に限られるので，数学IIIに出るような複雑なものはない。偶関数と奇関数の性質をうまく利用したりして，計算のスピードアップをはかるように，平素からの計算練習が最も有効な勉強法である。あとは問題のスタイルと解き方を覚えることが大切。

1st step

☞解答は「考え方と解答」112 ページ

445　関数 $f(x)$ が次のように与えられている。$f(x)=\begin{cases} 2-|x| & (|x|\geqq 1) \\ |x| & (|x|<1) \end{cases}$ このとき，

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $y=f(x-1)$ のグラフをかけ。

(3) $\displaystyle\int_0^3 xf(x-1)\,dx$ の値を求めよ。　(北海道工大)

446　次の 3 つの条件(a)，(b)，(c)をみたす x の 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=7$　(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=-\frac{17}{6}$　(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} f(n)=130$　(秋田大－教育)

447　関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とする。さらに，$g(x)=f'(x)$ とおく。このとき，

$$\int_0^x g(t-x)\,dt=f(x),\ f(1)=1,\ f(2)=4$$

をみたすような a，b，c，d の値を求めよ。　(山口大－文系)

448　$F(a)=\displaystyle\int_{-1}^1 |x(x-a)|\,dx$ とおく。$F(a)=\dfrac{3}{4}$ をみたす実数 a を求めよ。　(福島大－教育)

449　$F(x)=\displaystyle\int_0^x (3t^2+2at+a)\,dt$ で定められる関数 $F(x)$ を考える。

(1) $F(1)$ を a の式で表せ。

(2) $a=-1$ とする。$F(x)=F(1)$ となる x の値を求めよ。

(3) 関数 $F(x)$ が単調増加関数であるような a の値の範囲を求めよ。　(東北薬大)

450 1次関数 $f(x)$ について, $g(c)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_c^{c+2} f(x)\,dx$ とおくとき, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_c^{c+2}|f(x)-g(c)|\,dx=1$ がすべての実数 c に対して成り立つような $f(x)$ を求めよ。 (大分大－工・教育)

451 2次関数 $f(x)=x^2+c$ について, $0<a\leqq 3$ の範囲で

$$g(a)=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx, \qquad h(a)=\frac{1}{a}\int_0^a |f(x)-g(a)|\,dx$$

とおく。このとき, $h(a)$ の最大値を求めよ。 (大分大－教育・経済)

452 関数 $f(x)$ が $f(x)=3x^2+2x\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt-1$ をみたし, $f(1)=-2$ とする。このとき, $a=\boxed{}$ である。ただし, $a>1$ とする。 (日本大－理工)

453 x の1次式 $f(x)$ に対し $F(x)=x\displaystyle\int_1^{2x+3} f(t)\,dt$ とおく。$F(1)=2$, $F'(0)=-10$ となるように $f(x)$ を定めよ。 (北大－文系)

2nd step

☞解答は「考え方と解答」114 ページ

454 a を整数とし, 関数 $f(x)=-2x^2+2x+a$ は次の条件をみたすものとする。

(i) 方程式 $f(x)=0$ は2つの異なる実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつ。

(ii) 積分値 $b=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ は整数である。

このとき, b の最小値とそれを与える a の値を求めよ。 (信州大－理・医)

455 $f(x)$ は2次関数で, $f(x)=0$ は相異なる2実数解 α, β をもつものとする。このとき,

$\dfrac{\displaystyle\int_\alpha^\beta xf(x)\,dx}{\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}$ の値を求めよ。 (学習院大－経済)

456 a, b を定数として, $f(x)=ax+b$ とおき, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=m$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=n$ とすると, m, n が整数で, かつ n は偶数になるという。

(1) a は偶数であり, b は整数であることを示せ。

(2) $0<-b<a$ のとき, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ が整数であれば, b は偶数であることを示せ。

(埼玉大－教育・経済)

457 関数 $F(x)$ を $F(x)=|f(x)|+|f'(x)|$（ただし，$f(x)=x^2-x$）と定める。このとき，

(1) $y=F(x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{1}{2}$ に関して対称になることを示せ。

(2) $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ の範囲において $y=F(x)$ のグラフをかけ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}F(x)\,dx$ の値を求めよ。（防衛大－理工）

458 a を正の定数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^2|x^2-(a+1)x+a|\,dx$ の値を a で表せ。（千葉大）

459 2次関数 $f(x)$ が実数 t によって定まる範囲 $t-1\leqq x\leqq t+1$ で最小値 $m(t)$ をもつものとする。

(1) $t\geqq 2$ のとき $m(t)=t^2-4t+5$ となるように2次関数 $f(x)$ を定めよ。

(2) この関数 $f(x)$ に関して $\displaystyle\int_1^3 m(t)\,dt$ の値を求めよ。（香川大－教育・法・経済）

460 関係式 $f(x)+x\displaystyle\int_0^1|f(x)|\,dx=x^2$ をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。（東京学芸大）

461 x の整式 $f(x)$，$g(x)$ が次の条件をみたしている。

$$\int_1^x f(t)\,dt=xg(x)+ax+1\ \ (a\text{ は定数}),\quad g(x)=x^2-x\int_0^1 f(t)\,dt-1$$

このとき，$a=\boxed{}$ であり，$f(x)=\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}$，$g(x)=x^2+\boxed{}x-1$ となる。

（慶大－総合政策）

462 $f(x)+\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt=2x^2-\frac{1}{2}$，$f'(x)g(x)=3x^2$ となる整式 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

（工学院大）

463 c を正の定数とする。$0\leqq t\leqq c$ において，関数 $f(t)$，$g(t)$ を次の式が成立するように定める。

$$f'(t)=-1,\ f(0)=2,\ g'(t)=f(t),\ g(0)=7$$

さらに，$c\leqq t$ において，関数 $h(t)$，$k(t)$ を次の式が成立するように定める。

$$h'(t)=1,\ h(c)=f(c),\ k'(t)=h(t),\ h(c)=g(c)$$

このとき，

(1) 点 $(f(t),\ g(t))$ の軌跡を求めよ。

(2) 点 $(h(t),\ k(t))$ の軌跡が原点を通るとき，c を求めよ。（九大－文系）

18 面　積

入試対策　単純に定積分で面積を求めれば終わりという問題は１つもない。２曲線の交点を求めたり，接線や法線にからむものなどばかりである。面積の問題ではグラフをきちんとかくのは常識である。数学IIでは整関数に限られるから，直線の囲む面積などの公式が利用できるときは積極的に活用し，速く，正確に計算できるかどうか，これは平素のノート上で行う問題練習にその成果を期待するよりほかに手はない。

1st step

☞解答は「考え方と解答」116 ページ

464　平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=x^2$ に接線をひく。ただし，$b<a^2$ とする。接線は２つあり，その接点を $\mathrm{Q}(x_1,\ x_1{}^2)$，$\mathrm{R}(x_2,\ x_2{}^2)$ とする。

(1)　$x_1+x_2=\boxed{}a+\boxed{}b$,　$x_1x_2=\boxed{}a+\boxed{}b$ である。

(2)　△PQR の重心が放物線 $y=2x^2$ の上にあれば，$b=\boxed{}a^2+\boxed{}a+\boxed{}$ が成り立つ。

(3)　２つの接線と放物線 $y=x^2$ で囲む部分の面積は $\sqrt{a^2+\boxed{}b}\,(\boxed{}a^2+\boxed{}b)$ である。

（上智大－経済）

465　３点 $(-2,\ 3)$，$(2,\ -3)$，$(4,\ 0)$ を通る２次関数 $f(x)$ がある。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　点 $(2,\ -3)$ において $f(x)$ の接線と直交する直線 $g(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ と $g(x)$ のグラフをかけ。

(4)　$f(x)$ と $g(x)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ。

（図書館情報大）

466　放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の相異なる２点 P, Q は，線分 PQ の長さが２となるように動く。線分 PQ の中点 M の x 座標を m とする。このとき，線分 PQ と放物線によって囲まれる図形の面積 S を m で表せ。

（滋賀大－経済）

467　xy 平面において，放物線 $C_1：y=x^2+ax$ と点 $(1,\ 1)$ に関して対称な曲線 C_2 が C_1 と２点で交わっている。

(1)　曲線 C_2 の方程式を求めよ。

(2)　実数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　２つの曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積が $\dfrac{1}{3}$ であるとき，a の値を求めよ。

（中央大－法）

468　2つの放物線 $C_1: y=\dfrac{1}{2}x^2$，$C_2: y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2a$（$a$ は定数）がある。

(1)　C_1，C_2 に共通な接線の方程式を求めよ。

(2)　C_1，C_2 と(1)で求めた接線で囲まれる部分の面積を求めよ。　（北海道教育大）

469　x についての2次関数 $y=-x^2+(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)x-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S は θ を用いて $S=\boxed{}$ で表される。θ を変化させるとき，S は最小値 $\boxed{}$，最大値 $\boxed{}$ をとる。θ を $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えるとき，S の最小値を与える θ は $\boxed{}^\circ$ と $\boxed{}^\circ$ で，S の最大値を与える θ は $\boxed{}^\circ$ と $\boxed{}^\circ$ である。　（立命館大－産業社会）

470　放物線 $y=x^2+1$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2+1)$ $(a>0)$ における接線 l の方程式は $y=\boxed{}x+\boxed{}$ である。接線 l と x 軸との交点をBとすると，点Bの x 座標は $\boxed{}$ である。点Bから $y=x^2+1$ にひいた l と異なるもう1つの接線を l' とし，その接点を $\mathrm{A'}$ とすると，$\mathrm{A'}$ の x 座標は $\boxed{}$ である。このことから，l，l' および放物線で囲まれた図形の面積 S は a を用いて $S=\boxed{}$ となり，S は $a=\boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。　（立命館大－理工）

471　放物線 $y=ax^2+(1-a)$ と円 $x^2+y^2=2$ はともに2点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1)$ を通る。

(1)　この2つの曲線がA，Bだけで交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲内で，放物線が円の面積を2等分するような a の値を求めよ。

（津田塾大－国際）

472　$c>1$ を定数とする。xy 平面で，点 $(1,\ c)$ を通る直線 l と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積を最小にする l の傾きを求めよ。また，その最小面積を求めよ。　（東京工大）

473　放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ $(a>0)$ における法線が再び C と交わる点をQとする。

(1)　点Qの座標を求めよ。

(2)　点Qが最も y 軸に近づいたときの a の値を求めよ。

(3)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，放物線 C と線分PQとで囲まれた図形の面積を求めよ。　（九大－法・経済）

474　直線 $y=\dfrac{x}{2}+1$ 上の点Pから放物線 $y=x^2$ にひいた2本の接線 l_1，l_2 が直交している。

(1)　点Pの座標を求めよ。

(2)　$y=x^2$ と l_1，l_2 の接点をそれぞれA，Bとするとき，直線ABと $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。　（福島大－経済）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」119 ページ

475 a は定数で，$a \geqq 0$ とする。2 つの放物線 $y=(x-1)^2+a$ …①，　$y=(x+1)^2-a$ …②
がある。

(1) ①，②の共通接線 l の方程式を求めよ。

(2) l と①，②によって囲まれた図形の面積を求めよ。　（埼玉大ー教育・経済）

476 (1) 定直線 l が $y=ax^2-\sqrt{3}x$ $(a>0)$ で表されるすべての放物線と定点 A で接するとき，A および l を求めよ。

(2) (1)の放物線上の点 P (P$\neq$A) における接線が l と交わる点を Q とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ のなす角が 30°であり，さらにこの放物線と 2 つの線分 AQ，PQ で囲まれる部分の面積が $\sqrt{3}$ であるとする。このとき，a の値を求めよ。　（北大ー理系）

477 2 次関数 $f(x)=x^2+px+q$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ は，この区間内の $x=\alpha$ で最小値，$x=\beta$ で最大値をとる。2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ線分 AB と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれた部分の面積を最小にする p の値と，そのときの面積を求めよ。　（愛媛大ー教育）

478 曲線 C：$y=ax^2-2ax+b$ 上の点 $\mathrm{P}\left(3,\ \dfrac{5}{2}\right)$ における法線が点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ を通るとき，a，b の値を定め，このとき，P，A と異なる曲線 C 上の点 Q における法線 l が A を通るならば，l と曲線 $y=|ax^2-2ax+b|$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。　（福井工大）

479 放物線 $y=x^2+ax+b$ が 2 つの直線 $y=kx$ と $y=-2kx$ とに，それぞれ点 A，B で接している。ただし，$k>0$ とする。

(1) a，b を k の式で表せ。

(2) 直線 AB と放物線とで囲まれた図形の面積を S_1 とし，△OAB の面積を S_2 とする。ただし，O は原点である。このとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ は k によらず一定であることを示せ。

（京都産業大ー理）

480 原点 (0，0) を通る 2 つの放物線と直線をそれぞれ

C_1：$y=ax^2+bx$ $(a \neq 0)$　　C_2：$y=px^2+qx$ $(p \neq 0)$　　L：$y=kx$ $(k \neq b,\ k \neq q)$

とし，C_1 と L で囲まれる部分の面積を S_1，C_2 と L で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，S_1 と S_2 の比が k によらないための必要十分条件を求めよ。　（東京工大）

481　xy 平面において，領域 A を A： $y \geqq x^2-2x$ によって定める。領域 A を直線 $y=x$ に関して対称に移した領域を B とするとき，領域 $A \cap B$ の面積 S を求めよ。 (早大－教育)

482　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が次の3条件をみたしているとする。

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to 1}\frac{f(x)}{x^2-x}=1$

(2)　曲線 $y=f(x)$ の $x=0$ における接線の傾きは負である。

(3)　2点 $(0, f(0))$ と $(1, f(1))$ を通る直線を l とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 l で囲まれる図形のうち，$0 \leqq x \leqq 1$ の部分の面積は $\dfrac{3}{4}$ である。

このとき，a，b，c の値を求めよ。 (京大－理系)

483　(1)　$\alpha<\beta$ のとき，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　2つの放物線 C_1： $y=x^2$ と C_2： $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2$ の交点を $\mathrm{P}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta, \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とし，C_2 上の点 $\mathrm{R}\left(t, \dfrac{1}{2}(t+1)^2\right)$ を $\alpha<t<\beta$ となるようにとる。C_2 の R における接線と C_1 で囲まれる部分の面積が，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になるように t の値を定めよ。 (東北大－文系)

484　放物線 $y=\dfrac{5}{8}x^2$ と点 $\mathrm{A}(0, 2)$ を中心とする円が異なる2点で接するとき，この円と放物線で囲まれる部分の面積を求めよ。ただし，円と放物線が共有点Pで接するとは，その点で同じ接線をもつことである。 (お茶の水女大)

485　座標平面において，円 C_1： $x^2+y^2=1$ と曲線 C_2： $y=ax^2+bx+c$ は，x 座標が $-t$，0，t の点を共有する。さらに，x 座標が $-t$ の点では，C_1 と C_2 は同じ接線をもつ。ただし，$a>0$，$0<t<1$ とする。このとき，

(1)　$a=\boxed{}$ $b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$，$t=\boxed{}$ である。

(2)　C_1 と C_2 の3つの共有点を結んでできる三角形の面積は $\boxed{}$ である。

(3)　x 座標が $-t$ と t である C_1 と C_2 の共有点を通る直線 l と曲線 C_2 によって囲まれる部分の面積は $\boxed{}$ である。

(4)　円 C_3： $x^2+\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2=r^2$ $(r>0)$ と曲線 C_2 の共有点の個数は1個である。このとき，$r=\boxed{}$ であり，共有点の座標は $(\boxed{}, \boxed{})$ である。 (慶大－環境情報)