19　微積分総合

入試対策　例えば接線，面積，最大・最小などのように単純に微分と積分を結合したものから，いわゆる関数方程式に関するものまでと，総合問題は幅が広い。もちろん，個々の事項についての内容の理解は大切であるが，それらをどのように総合して問題を解いていくか。基本の確認と幅広い勉強を積み重ねて，重要問題は解き方を暗記するまで徹底してマスターしていくこと。数学II，数学Bまでの範囲で最も出題頻度が高い。

次に，理系で数学IIIまでが範囲の場合には「4次式以上の微分，3次式以上の積分」が当然のこととして入ってくる。これら数学IIをこえた範囲の問題（505〜515）は，特に理系の諸君は必修問題として勉強してほしい。

1st step

☞解答は「考え方と解答」122ページ

486　曲線 $y=x^2$ の上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ $(a>0)$ に対し，y 軸の負の部分（原点を含まない）の上にある点Bを，次の条件をみたすようにとりたい。

条件：　Aを通り y 軸に平行な直線と，Bを通り x 軸に平行な直線との交点をPとするとき，　APの長さとBPの長さの和は1である。

(1)　点Pがとれるための a の条件を求めよ。

(2)　(1)のとき，y 軸，直線AP，直線BP，および曲線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積を a で表せ。

(3)　(2)の面積を最大にする a の値を求めよ。　（東京水産大）

487　(1)　放物線 $y=f(x)=2x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式 $y=g(x)$ を求めよ。

(2)　(1)の $f(x)$，$g(x)$ に対して $F(x)$ を $F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\leqq 1) \\ g(x) & (x>1) \end{cases}$ のように定義する。

(ア)　関数 $F(x)$ のグラフをかけ。

(イ)　$a\geqq 0$ のとき，$\int_a^{a+1} F(x)\,dx$ の最小値を求めよ。　（高知大）

488　実数 t に対し，$a(t)=t^2+2t-3$，　$b(t)=-3(t^2+2t)$ とおき，x についての2次関数 $y=x^2+a(t)x+b(t)$ を考える。x についての2次方程式 $x^2+a(t)x+b(t)=0$ の判別式を $D(t)$ とすると，$D(t)=(\boxed{})^2>0$ となり，$y=x^2+a(t)x+b(t)$ のグラフは x 軸と交わる。このグラフと x 軸とで囲まれる図形の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)=\boxed{}$ である。$t=\boxed{}$ のときに $S(t)$ は最小となり，最小値は $\boxed{}$ で，このとき，このグラフと x 軸との交点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ は $\alpha=\boxed{}$，$\beta=\boxed{}$ である。　（近畿大－理工）

489 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a \neq 0)$ が $x=\alpha$，β で極値をとるとき，

(1) $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$ となることを示せ。

(2) $\alpha-\beta=-2$，$f(\alpha)-f(\beta)=-12$ で，曲線 $y=f(x)$ 上の点 A$(1,\ 9)$ における接線が $y=9x$ のとき，a，b，c，d の値を求めよ。 （成城大－経済）

490 放物線 C_1：$y=x^2$ と 円 C_2：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ が点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ において，共通の接線をもつものとする。

(1) b と r を a を用いて表せ。

(2) さらに，C_1 と C_2 が点 P 以外のただ 1 点 Q$(q,\ q^2)$ $\left(q \neq -\dfrac{1}{2}\right)$ で交わるものとする。

(a) a と q を求めよ。

(b) 円 C_2 の中心が直線 PQ 上にあることを示せ。

(c) C_1 と C_2 で囲まれる図形のうち，小さい方の部分の面積を求めよ。 （奈良教育大）

491 関数 $f(x)$，$g(x)$ （いずれも定数でない）が

$$f(0)=1 \quad \cdots\cdots① \qquad \int_0^x \{f(t)+g(t)\}dt=\frac{x^3}{3}-x \quad \cdots\cdots②$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=6x^2-12x+6 \quad \cdots\cdots③$$

の条件をみたしているとき，

(1) $f(x)+g(x)=\boxed{}$ である。

(2) $g(0)=\boxed{}$ だから，$f(x)g(x)=\boxed{}$ である。

(3) (1)，(2)の結果から，$f(x)$，$g(x)$ を求めると，$f(x)=\boxed{}$，$g(x)=\boxed{}$ である。

（共立薬大）

492 関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_0^x |t-2x+1|\,dt$ によって定義する。$f(x)$ を x の適当な範囲で分けて x の整式として表すと，

$x \leqq$ ア$\boxed{}$ のとき，$f(x)=$ イ$\boxed{}$

ア$\boxed{} \leqq x \leqq$ ウ$\boxed{}$ のとき，$f(x)=$ エ$\boxed{}$

ウ$\boxed{} \leqq x$ のとき，$f(x)=$ オ$\boxed{}$

である。$f(x)$ の極値を調べると，$x=$ カ$\boxed{}$ のとき極大値キ$\boxed{}$ をとり，$x=$ ク$\boxed{}$ のとき極小値ケ$\boxed{}$ をとる。 （立命館大－理工）

493 速度 20 m/秒で直進する列車にブレーキをかけてから t 秒後の速度が $20-4t$ で表されるとする（ただし，停止するまで）。

(1) ブレーキをかけてから停止するまでの走行距離 L(m)を求めよ。

(2) ブレーキをかけてから $\dfrac{1}{2}L$(m) 走ったところでの速度を有効数字 3 桁まで(以下四捨五入)求めよ。 （図書館情報大）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」125ページ

494 (1) a を $0<a<1$ なる定数とし，点 $(x,\ y)$ の 2 つの集合

$$A=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq x(2-x)\},\ B=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq a\}$$

に対し，集合 $C=\{A\cap(\overline{A\cap B})\}\cup\{B\cap(\overline{A\cap B})\}$ を斜線をひいて図示せよ。

(2) 方程式 $x(2-x)=a$ の解の小さい方を t とするとき，集合 C の面積 S を t のみの式で表せ。

(3) a が $0<a<1$ で変わるとき，S を最小にする a の値，および S の最小値を求めよ。

(東北工大)

495 xy 平面において，次の条件(i)，(ii)をみたす円 C を考える。

(i) C は直線 $y=-3$ に接する。

(ii) 円 $x^2+(y-a)^2=1$ は C に内接する。ただし，$-2<a\leqq 2$ とする。

このとき，

(1) 円 C の中心の軌跡を求めよ。

(2) (1)で求めた軌跡と x 軸とで囲まれた図形の面積を最大にする a の値と，そのときの面積を求めよ。

(佐賀大－理工・農)

496 実数 x の関数 $f(x)$ について，$f(0)=0$，$f'(x)=|x|$ とする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ に対して，点 $(a,\ f(a))$ におけるその接線の方程式を a を用いて表せ。

(3) (2)で求めた接線と $y=f(x)$ とによって囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

(明治大－政経)

497 2 次関数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}x$ について，

(1) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$ において放物線 $y=f(x)$ と共通な接線をもち，かつ，x 軸の正の部分に接する円 C の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=f(x)$ は点 P を除いて円 C の外側にあることを示せ。

(3) 放物線 $y=f(x)$ と円 C と x 軸で囲まれ，3 点 O, P, Q を端点とする図形の面積を求めよ。ただし，O は原点，Q は x 軸と円 C との接点とする。

(山形大－理系)

498 実数 a に対して，$f(a)=\displaystyle\int_0^1|x(x+a)|dx$ とおく。$f(a)$ の最小値，およびそのときの a の値を求めよ。

(筑波大)

499 x の関数 $f(x)=\int_c^x (t^2+at+b)\,dt$ は $x=-1$ と $x=2$ で極値をとり，$f(0)=\frac{10}{3}$ である。a，b，c の値を求めよ。 （大阪府大－経済）

500 a を定数とし，$f(x)=\int_{2a}^x (t+1)(t-a)\,dt$ とする。

(1) $f(x)$ を x の整式で表せ。

(2) $f(x)=0$ をみたす実数 x の個数が3個となるための a の条件を求めよ。

(3) $f(x)=0$，$-1<x<1$ をみたす実数 x の個数が2個となるための a の条件を求めよ。

（東京水産大）

501 0でない x の整式 $f(x)$ に対し，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，$G(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$ とおく。ある定数 p，q が存在して，$F(G(x))=-\{F(x)\}^2+pG(x)+q$ が成立しているとする。

(1) $a=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくとき，$F(x)$ を a を用いて表せ。

(2) さらに，$0 \leqq x \leqq 1$ での $F(x)$ の最大値が $\frac{1}{2}$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。 （京大－理系）

502 (1) $k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，次の等式をみたす関数 $y=f_k(x)$ を求めよ。

$$f_k(x)=kx^2+\int_0^{\frac{1}{k}} f_k(t)\,dt$$

(2) (1)の曲線 $y=f_k(x)$ について，原点を通る接線の方程式を求めよ。

(3) (1)の関数について，$\sum_{k=2}^{n}\int_0^1 f_k(x)\,dx$ を求めよ。ただし，$n \geqq 2$ とする。 （島根医大）

503 点Pは時刻0で原点Oを出発し，x 軸上を正の向きに等速度1で動く。また，点Qは時刻0で点(0，1)を出発し，時刻 t のとき速度 $2t$ で y 軸上を負の向きに動く。$0<t<1$ とする。

(1) △OPQの面積が最大となる時刻，およびそのときのこの三角形の面積を求めよ。

(2) 線分PQの長さが最小となる時刻，およびそのときの線分の長さを求めよ。

（中央大－商）

504 直線上を運動する点Pがある。点Pが定点Oを通過してから t 分後の速度は

$$f(t)=3at^2+2bt+c \quad (\text{km/分}) \quad (a \neq 0)$$

であって，1分後には，点Oから4km離れた点Aで停止する。$\int_0^1 \{f(t)\}^2\,dt$ が最小になるような $f(t)$ を求めよ。 （名大－経済）

505 関数 $y=f(x)=ax^3-bx^2-cx+d$ は，次の条件(i)，(ii)，(iii)をみたすとする。

(i) 曲線 $y=f(x)$ は点 $(0,\ 12)$ を通る。

(ii) 関数 $y=f(x)$ は $x=\dfrac{1+\sqrt{22}}{3}$ と $x=\dfrac{1-\sqrt{22}}{3}$ で極値をとる。

(iii) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の傾きは1である。

このとき，

(1) 定数 a，b，c，d の値は $a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$，$d=\boxed{}$ である。

(2) 2曲線 $y=f(x)$ と $x=f(y)$ によって囲まれた図形の面積は $\boxed{}$ である。 (慶大－商)

506 2つの曲線 $y=x^3-x$ と $y=x^2-a$ が1点Pを通り，Pにおいて共通接線をもっている。この2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。 (京大－理)

507 3次関数 $f(x)=x(x^2-a^2)$ と2次関数 $g(x)=x^2-a^2$（a は定数で，$a>1$）について，

(1) 2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の座標を求めよ。

(2) 2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた2つの部分の面積の差を S とするとき，S を a で表せ。

(3) 関数 $f(x)$ の極小値と関数 $g(x)$ の最小値が等しいとき，(2)における S の値を求めよ。

(和歌山大－教育)

508 放物線 $C：y=1-x^2$ の上の点 $\mathrm{A}(a,\ 1-a^2)$ $(0<a<1)$ における C の接線を l とするとき，

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C と y 軸で囲まれた部分の面積 S_1 を求めよ。

(3) l と C と x 軸で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ。

(4) 積 S_1S_2 が最大になるように a の値を定めよ。 (宮城教育大)

509 曲線 $y=ax^3$ $(a>0)$ を C とする。C 上の原点以外の点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ ax_0{}^3)$ から C に P_0 を接点としない接線をひき，その接点を P_1 とする。次に点 P_1 から C に P_1 を接点としない接線をひき，その接点を P_2 とする。以下同様にして，C 上に点 P_1，P_2，…，P_n，… を定める。点 P_n の x 座標を x_n，線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ と C で囲まれる部分の面積を S_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とする。

(1) $x_1=-\dfrac{1}{2}x_0$ を示せ。

(2) S_2 を S_1 で表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}S_k$ を a，x_0，n で表せ。 (広島大－文系)

510 すべての３次式 $f(x)$ に対して $\int_{-1}^{1}(x^2+1)f(x)\,dx=Af(\alpha)+Bf(\beta)$ をみたすような，$f(x)$ によらない定数 A，B，α，β がある。A，B，α，β の値を求めよ。ただし，$\alpha \geqq \beta$ とする。

（学習院大－経済）

511 関数 $f(x)$ が $f(x)=x^3-4x\int_{0}^{1}|f(t)|\,dt$ をみたすとき，$f(x)$ の極大値を求めよ。

（広島大－理系）

512 整式 $f(x)$ は次の等式をみたすものとする。

$$x^2f'(x)+f(x)+\int_{x}^{2x}f(t)\,dt=13x^3-2x^2-5x+k \quad (k\text{ は定数})$$

(1) $f(x)$ の次数を決定せよ。

(2) $f(x)$ と定数 k を求めよ。

（東京薬大）

513 定数でない x の整式 $f(x)$ が次の２つの条件をみたすとする。

(i) $3f(x)=xf'(x)+k$ （k は定数）

(ii) $7\int_{0}^{1}\{f(x)\}^2dx=20\int_{0}^{1}x\{f(x)\}^2dx$

このとき，$\dfrac{f(0)}{f'(1)}$ の値を求めよ

（西南学院大）

514 次の２つの等式を同時にみたす関数 $f(x)$ と $g(x)$ を考える。

$$f(x)=x^2+\int_{-1}^{1}(x-t)g(t)\,dt,\qquad g(x)=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{3}{2}f(t-x)+x\,g(t)\right\}dt$$

(1) $f(x)$ は x の２次式であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

（東北大－文系）

515 x の整式 $f_n(x)$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$） が

$$f_1(x)=x^2+2x-2,\quad x^2f_{n+1}(x)-x^3+x^2=\int_{0}^{x}tf_n(t)\,dt$$

をみたすものとする。

(1) $f_2(x)$ を求めよ。

(2) $f_n(x)$ は x の２次式であることを示せ。

(3) $f_n(x)$ を求めよ。

（京都府大）