数学B

20 平面上のベクトル

入試対策

最も基本的な事項は分点のベクトルである。いかにして分点のベクトルの公式を当てはめられるかが，解き方の根本である。次に，内積についての計算では，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ の関係を用いることが多い。図形への応用では「内積 $\Longleftrightarrow$ 角」の関係をうまく利用できるかどうかである。ベクトルは図形の問題で，「図形の問題は図をかいて考える」ことは鉄則である。メネラウスの定理やチェバの定理が有効に働くことが多い。解き方もいろいろ考えられよう。問題演習によってそのいろいろな手法をマスターしなければならない。

1st step

☞解答は「考え方と解答」132ページ

516 $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。 辺 AB を 1:2 に内分する点を C，線分 OC を 3:5 に内分する点を D とする。

(1) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

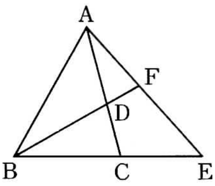
(2) 線分 BD の延長が辺 OA と交わる点を E とする。このとき，BD : DE および OE : EA を求めよ。 （静岡大－農・理）

517 AB∥OC，$AB=\frac{1}{2}OC$ の四辺形 OABC がある。辺 OA 上に点 P，辺 BC 上に点 Q をとって $OP=\frac{1}{2}OA$，$CQ=\frac{1}{3}CB$ とし，さらに，2 直線 OC，PQ の交点を R とするとき，

$\overrightarrow{PQ}=\boxed{}\,\overrightarrow{OA}+\boxed{}\,\overrightarrow{OC}$，$\dfrac{OR}{OC}=\boxed{}$，$\dfrac{\triangle OPR\text{の面積}}{\triangle OABC\text{の面積}}=\boxed{}$ である。 （東京薬大）

518 1 辺が 1 の正五角形 ABCDE に対し，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。 （お茶の水女大－理）

519 同一直線上にない3点A, B, Cがある。図のように線分ACを3：2に内分する点をD，線分BCをa：1($a>1$とする)に外分する点をEとし，直線BDと直線AEの交点をFとする。



(1) $\overrightarrow{AE}=\boxed{}\,\overrightarrow{AB}+\boxed{}\,\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\boxed{}\,\overrightarrow{AB}+\boxed{}\,\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{AF}=s\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{BF}=t\overrightarrow{BD}$ とおくとき，s，t は a を用いて
$s=\boxed{}$，$t=\boxed{}$ と表される。

(3) $\overrightarrow{CF}\parallel\overrightarrow{AB}$ となるようにするには，$a=\boxed{}$ とすればよい。 (立命館大－産業社会)

520 △ABCにおいて，$\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{DE}$ で，かつ，△ADEと△BCDの面積が等しくなるような点D，Eを辺AB，AC上にとり，BEとCDの交点をPとする。

(1) k の値を求めよ。

(2) $l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ となるような $l:m:n$ を求めよ。 (福井工大)

521 2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ があって，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$ である。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。

(3) $|\vec{a}-\vec{b}|$を求めよ。 (立教大－社会)

522 座標平面上の3点を A(1, 0)，B(0, 1)，C(2, 2) とする。ベクトル $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$ の大きさは $\boxed{}$ ，内積 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ は $\boxed{}$ ，$\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角の余弦は $\boxed{}$ である。また，△ABCの面積は$\boxed{}$，重心の位置ベクトルの大きさは $\boxed{}$ である。さらに，$\overrightarrow{AC}$ に垂直な単位ベクトルで x 成分が正であるものの y 成分は $\boxed{}$ である。 (東北工大)

523 △OABにおいて，OA=1，AB=BO=2 とする。頂点Aから辺OBへおろした垂線の足をH，点Hから辺ABへおろした垂線の足をKとする。$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$とするとき，

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{AK}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。 (信州大－工)

524 Oを原点とし，$\overrightarrow{OA}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{OB}=(3,\ -1)$ とする。$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とおくとき，$-1\leqq\alpha\leqq1$，$-1\leqq\beta\leqq1$，$0\leqq\alpha+\beta\leqq1$ をみたすような点Pの動く範囲を図示せよ。

(法政大－経営)

525 平面上に5点 O(0, 0), A(−6, 0), B(6, 6), C(12, 0) および P(0, 12) がある。点Qが線分 AO 上を，点Rが線分 BC 上を動くとき，△PQR の重心 G のえがく図形を求めよ。

(津田塾大ー数学)

526 短針の長さが1，長針の長さが2の時計がある。短針を $\vec{a}$，長針を $\vec{b}$ とするとき，点 $(|\vec{a}+\vec{b}|,\ \vec{a}\cdot\vec{b})$ の動く範囲を求め，それを図示せよ。

(東北大ー理系)

527 座標平面上に3点 A$(0,\ \sqrt{3})$, B$(-1,\ 0)$, C$(2,\ 0)$ をとる。∠ABC の二等分線 l と線分 AC の交点を D とする。

(1) AD : DC = ア$\boxed{}$: イ$\boxed{}$ であるから，$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{\text{ウ}\boxed{}}(\text{エ}\boxed{},\ \text{オ}\boxed{}\sqrt{\text{カ}\boxed{}})$ である。

(2) l 上の2点 Q と R を，それぞれ△ABC の内部と外部にとり，∠AQC と∠ARC がともに直角になるようにすると，$\overrightarrow{BQ}=\left(\dfrac{\text{キ}\boxed{}}{\text{ク}\boxed{}},\ \dfrac{\sqrt{\text{ケ}\boxed{}}}{\text{コ}\boxed{}}\right)$, $\overrightarrow{BR}=(\text{サ}\boxed{},\ \sqrt{\text{シ}\boxed{}})$ である。

(3) このとき，QD : DR = ス$\boxed{}$: セ$\boxed{}$ であり，△AQD : △CRD = ソ$\boxed{}$: タチ$\boxed{}$ である。

(センター試験)

528 辺 AB, AC の長さがそれぞれ 2, 1 であり，∠BAC = 30° である△ABC において，その外心を D とする。すると，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\boxed{}$ となり，内積 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\boxed{}$ となる。

x, y を実数として，$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ とおくと，$x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$ となる。

(大阪産業大ー工)

529 円 $x^2+y^2=2$ と点 A(0, 2) がある。原点を O とする。

(1) A からこの円にひいた接線の接点を T とするとき，内積 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AT}$ の値を求めよ。

(2) A を通る直線がこの円と2点 P, Q で交わり，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1$ をみたすとする。このとき，線分 PQ, AP, AQ の長さ $\overline{PQ}$, $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$ を求めよ。ただし，$\overline{AP}<\overline{AQ}$ とする。

(埼玉大ー教育・経済)

530 3点 A, B, C が点 O を中心とする半径1の円周上にあり，$13\overrightarrow{OA}+12\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ をみたしている。∠AOB = α, ∠AOC = β とするとき，

(1) $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$ であることを示せ。

(2) $\cos\alpha$ および $\cos\beta$ を求めよ。

(3) A から BC へひいた垂線と BC との交点を H とする。AH の長さを求めよ。 (長崎大)

2nd step

☞解答は「考え方と解答」135ページ

531 $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。3点P，Q，R を $\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OQ}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{OR}=y\vec{b}$ により定める。ただし，$x>1$，$y>1$ とする。

(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を x，y と $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 3点P，Q，R が同一直線上にあるための条件を x，y で表せ。

(3) (2)の条件のもとで，$x+y$ の最小値を求めよ。 （愛媛大ー理系）

532 $\triangle$OAB において，辺 OA を 3：2 に内分する点をC，辺 AB を $m:n$ に内分する点を D とする。線分 OD と線分 BC の交点を P とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OP}$ を m，n，$\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) 辺 OA の中点を Q とする。線分 QP と辺 OB が平行となるときの比 $m:n$ を求めよ。

（新潟大ー農・経済）

533 $\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB をそれぞれ 2：1 に内分する点を D，E，F とし，直線 AD と直線 BE の交点を P，直線 BE と直線 CF の交点を Q，直線 CF と直線 AD の交点を R とする。

(1) $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ を用いて $\overrightarrow{CP}$ を表し，AP：PD および BP：PE を求めよ。

(2) $\triangle$ ABC の面積を S とするとき，$\triangle$ PQR の面積を S を用いて表せ。 （鹿児島大ー教育）

534 BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ である $\triangle$ABC の内心を I とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{u}$，$\overrightarrow{AC},=\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{AI}$ を $\vec{u}$，$\vec{v}$ と a，b，c で表せ。

(2) $\overrightarrow{AI}$ の長さ AI を a，b，c で表せ。

(3) $\mathrm{AI}^2+\mathrm{BI}^2+\mathrm{CI}^2$ を a，b，c で表せ。 （同志社大ー工）

535 $\triangle$OAB で，辺 OA を 3：2 に内分する点をC，辺 OB を 1：2 に内分する点を D とする。

(1) 線分 AD と BC の交点を P，直線 OP と辺 AB の交点を Q とすると，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{OP}$$ である。

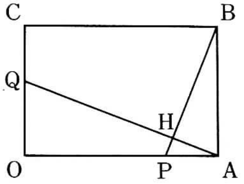
(2) 線分 AC 上に点 E，線分 BD 上に点 F をとり，線分 EF が点 P を通るようにする。$\overrightarrow{OE}=\alpha\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OF}=\beta\overrightarrow{OD}$ とすると，α，β の間には

$$\frac{1}{\boxed{\text{キ}}}\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\alpha}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\beta}\right)=1$$ の関係が成り立つ。 （センター試験）

536 右の図の長方形OABCにおいて，OA=3，OC=2，AP：OQ=2：3 とする。

(1) $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AQ}$ であることを示せ。

(2) AP=1 であるとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。



（宮崎大）

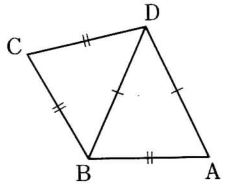
537 右図のように，二等辺三角形DABと，BDを底辺としCがBDに関してAと反対側にある二等辺三角形CBDにおいて，DC=CB=BA=1，DB=DA=l とする。

(1) $\overrightarrow{DC}$ と $\overrightarrow{DB}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{DB}$ と $\overrightarrow{DA}$ の内積を求めよ。

(3) 四角形ABCDが円に内接するように l を定めよ。

(4) (3)で定めた l に対して，∠BCDの値を求めよ。



（大阪教育大）

538 平面上に正三角形OABがある。この平面上で，頂点Oを通り辺OBに垂直な直線と，頂点Aを通り，辺ABに垂直な直線との交点をPとする。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とするとき，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 辺OA上の点Qを通り辺OBに平行な直線が辺ABと交わる点をEとする。また，Qを通り，辺ABに平行な直線が辺OBと交わる点をFとする。このとき，直線PQと直線EFとは直交することを示せ。

（高知大）

539 1辺の長さが1のひし形ABCDがある。線分DCを $k:1$ の比に外分する点をPとし，2直線AP，BDの交点をQとする。ただし，$k>1$ とする。

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AQ}$ の内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}$ について $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}=\dfrac{4k-1}{3(2k-1)}$ が成り立つとき，ひし形ABCDの面積を求めよ。

（千葉大）

540 ▱ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BC}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とする。

(1) $\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{DP}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，x で表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が正のとき，$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{DP}|^2$ の最小値を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 （広島大－文系）

541 ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ のなす角はともに 60° である。$\vec{b}$ を単位ベクトルとするとき，$\vec{a}$ の大きさを求めよ。

（群馬大）

542 $\triangle$ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB におろした垂線の足をそれぞれ P，Q，R とするとき，$\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ が成立しているとする。

(1) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ の関係式を求めよ。

(2) $\angle$A の大きさを求めよ。（京大－理系）

543 $\square$ABCD において，AB，BC の中点をそれぞれ P，Q とし，CD の 3 等分点を C の方から順に R，S とする。

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{s}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{t}$ とするとき，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{s}$，$\vec{t}$ で表せ。

(2) AR と PS の交点を X，PS と QD の交点を Y とするとき，$\overrightarrow{XY}$ を $\vec{s}$，$\vec{t}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{BD}$ の大きさを $|\overrightarrow{AB}|=a$，$|\overrightarrow{AD}|=b$，$|\overrightarrow{AC}|=c$ を用いて表せ。（お茶の水女大－理）

544 OA＝OB＝1 かつ $\angle$AOB を直角とする$\triangle$ AOB の点 O から AB に平行な直線 l をひく。l 上の点で AB＝AC となるもののうちで B に近い方を C とする。直線 AC と OB の交点を D とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，

(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 線分 BD および BC の長さを求めよ。（東京農工大－農）

545 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ で表し，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ と定義する。$\vec{a}$ も $\vec{b}$ も $\vec{0}$ でないとき，次のことを証明せよ。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交するための必要十分条件は，任意の実数 λ に対して，不等式 $|\vec{a}|\leqq|\vec{a}+\lambda\vec{b}|$ が成り立つことである。（早大－政経）

546 原点を O とする座標平面上に，点 A(2，0) を中心とする半径 1 の円 C_1 と，点 B(－4，0) を中心とする半径 2 の円 C_2 がある。点 P は C_1 上を，点 Q は C_2 上をそれぞれ独立に自由に動きまわるとする。

(1) $\overrightarrow{OS}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ})$ とするとき，点 S が動くことのできる範囲を求め，その概形をかけ。

(2) $\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$ とするとき，点 R が動くことのできる範囲を求め，その概形をかけ。

（岡山大）

547 $\triangle$OAB の辺 OA，OB（両端の点を除く）上に，それぞれ動点 P，Q があり，関係式 $2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ をみたしながら動いている。このとき，$\triangle$ OPQ の重心 G の動く範囲を図示せよ。（神戸大－文系）

21 空間のベクトル

入試対策　空間図形についての問題には，幾何的な性質を利用する，空間座標を用いる，平面上の図形に直して考える，ベクトルを用いる，直線や平面の方程式を使うなど，いろいろな解き方がある。ある問題に対して，どの方法を用いてもよいわけである。本節の解答では空間座標やベクトルを主として用いたが，他の方法ではどうするかを考えてみるのは最良の勉強法であろう。要は多様な技法を１つでも余計にマスターすることである。

1st step

☞解答は「考え方と解答」140ページ

548　どの３点も同一直線上にない空間内の４点をO，A，B，Cとする。

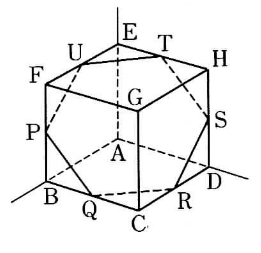
(1)　ベクトルの長さの間に，$|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2$の関係があるとき，$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{BC}$は垂直であることを証明せよ。

(2)　AC，OBの中点をそれぞれM，Nとする。OC＝AB，OA＝BCであれば，MNはOBとACに垂直になることを証明せよ。　（鳥取大－工）

549　空間に４点A$(-2,\ 2,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 1)$，C$(4,\ -7,\ 4)$，D$(0,\ 1,\ -4)$がある。線分ABを1：2に内分する点Pのx座標は$\boxed{}$，線分BCを1：2に内分する点Qのy座標は$\boxed{}$，線分CDを1：3に内分する点Rのz座標は$\boxed{}$である。線分AD上に１点Sをとり，２つの線分SQとPRが交わるようにする。このとき，Sは線分ADを$\boxed{}$：$\boxed{}$に内分する。　（中央大－理工）

550　図のような１辺の長さ２の立方体ABCD-EFGHにおいて，

$\vec{p}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\vec{q}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\vec{r}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$とし，辺FB，BC，CD，DH，HE，EFの中点をそれぞれP，Q，R，S，T，Uとする。



(1)　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AR}$，$\overrightarrow{AS}$，$\overrightarrow{AT}$，$\overrightarrow{AU}$を$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{RS}|=|\overrightarrow{ST}|=|\overrightarrow{TU}|=|\overrightarrow{UP}|=\sqrt{2}$であることを示せ。

(3)　$\angle UPQ=\angle PQR=\angle QRS=\angle RST=\angle STU=\angle TUP=120^\circ$であることを示せ。

(4)　３点S，T，Uは他の３点P，Q，Rの決定する平面上にあることを示せ。　（香川大－経済）

551　３点A$(\sin t,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ \cos t,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ \sin t+\cos t)$を頂点とする△ABCの面積を$S(t)$とする。区間$0^\circ \leqq t \leqq 180^\circ$における$S(t)$の最大値と最小値を求めよ。　（名古屋工大）

552 xyz 空間に正三角形 ABC があり，A, B, C から xy 平面におろした垂線と xy 平面との交点をそれぞれ A′, B′, C′とすると，$A'B'=1$, $B'C'=\sqrt{6}$, $C'A'=3$ である。正三角形 ABC の 1 辺の長さを求めよ。

（一橋大）

553 2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 0)$，$\vec{b}=(-2,\ 1,\ 2)$ のいずれにも垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ は $\boxed{}$ である。また，$\vec{e}$ に平行な直線を l とすると，$\vec{c}=(3,\ 1,\ 2)$ の l 上への正射影の長さは $\boxed{}$ である。

（芝浦工大）

554 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B$(0,\ 1,\ \sqrt{3})$ で定まる平面上で，$\angle$AOB を 2 等分する直線を l とする。

(1) 直線 l の方向ベクトルで長さ 1 のものを求めよ。

(2) 点 P が直線 l 上を動くとき，$\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PB}|}$ の最大値および最小値を求めよ。（名古屋市大－経済）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」141 ページ

555 四面体 OABC があり，OA=1，OB=2，OC=t とする。$\cos\angle AOC=\cos\angle BOC=\dfrac{3}{4}$，$\angle AOB=60^\circ$ とするとき，

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を t を用いて表せ。

(2) $\cos\angle CAB$ および $\cos\angle CBA$ を t を用いて表せ。

(3) 辺 AB 上の 2 点と点 C を頂点とする正三角形がつくれるような t の範囲を求めよ。

（九州工大）

556 四面体 OABC において，OA=BC，OB=CA，OC=AB とする。ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。〈注．$(\vec{a},\ \vec{b})$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。〉

(1) $(\vec{a},\ \vec{b})=\dfrac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2)$ が成り立つことを示せ。

(2) 辺 OA の中点を D，辺 BC の中点を E とすると，$\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{BC}$ は直交することを示せ。

(3) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ をみたす点 P は 4 頂点 O，A，B，C から等距離にあることを示せ。

（筑波大）

557 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある。辺 CD を 1：2 に内分する点を E とし，辺 AD 上に任意に点 F をとり，線分 AE と線分 CF の交点を G とする。AF：AD=m：1 とおくとき，

(1) $\overrightarrow{AG}$ を $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ および m を用いて表せ。

(2) BG の長さが最短となるときの m の値，およびそのときの BG の長さを求めよ。

（日本大－医）

558 空間ベクトル $\vec{a}=(3,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -1,\ 1)$ に対し，$\vec{a}+m\vec{b}$，$\vec{a}+n\vec{b}$ が直交するような整数 m，n $(m<n)$ の組 $(m,\ n)$ は全部で $\boxed{}$ 組ある。これらの各組 $(m,\ n)$ について，2つのベクトル $\vec{a}+m\vec{b}$，$\vec{a}+n\vec{b}$ の始点を原点とするとき，終点間の距離が最も長くなるのは $m=\boxed{}$，$n=\boxed{}$ のときであり，その距離は $\boxed{}$ である。 （東京理大－薬）

559 a を正の定数とする。空間内の動点 P，Q はそれぞれ y 軸の正の部分，z 軸の正の部分を条件「原点 O，定点 $A(1,\ 0,\ 0)$，P，Q を頂点とする四面体の体積が $\dfrac{a}{6}$ である」をみたしながら動くものとする。P の座標を $(0,\ t,\ 0)$ $(t>0)$ とおくと，Q の座標は $(0,\ 0,\ \boxed{})$ となる。$\theta=\angle PAQ$ とおくと，その余弦は，定数 a，変数 t を用いて $\cos\theta=\boxed{}$ と表せる。したがって，θ が最小となるのは $t=\boxed{}$ のときで，このとき $\triangle APQ$ の外心の座標は $(\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{})$ となる。 （横浜市大－商）

560 空間内の互いに直交する長さが1のベクトルを $\vec{u}$，$\vec{v}$ とし，点 A を通り $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線を l，点 B を通り $\vec{v}$ を方向ベクトルとする直線を m とする。点 P は l 上，点 Q は m 上を動くとき，P と Q の距離の最小値を $\overrightarrow{AB}$，$\vec{u}$，$\vec{v}$ を用いて表せ。 （筑波大）

561 四面体 OABC の辺 OA の中点を M，辺 BC を $s:(1-s)$ に内分する点を Q，線分 MQ の中点を R とし，直線 OR と平面 ABC の交点を P とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および s を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および s を用いて表し，s を0から1まで変化させるときの点 P の軌跡を求めよ。 （和歌山県医大）

562 1辺の長さ d の正四面体 OABC において，$\triangle ABC$ の重心を G，$\triangle ABC$ を含む平面を α とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表し，$\overrightarrow{OG}$ は $\overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{AC}$ にそれぞれ垂直であることを示せ。

(2) 平面 α 上の点 P が等式 $|\overrightarrow{PO}|^2+|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2=3d^2$ をみたすならば，P は G を中心とする半径 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}d$ の円周上にあることを示せ。 （広島大－理系）

563 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とし，空間内の原点 O と4つの点 $A(1,\ 1,\ 1)$，$B(-a^{-1},\ a,\ 0)$，$C(-a,\ 0,\ a^{-1})$，$D(0,\ -a^{-1},\ a)$ について，

(1) 4点 A，B，C，D は正方形の頂点であることを示せ。

(2) 四角錐 O-ABCD を平面 $x=0$ によって2つの部分 W_1，W_2 に分けたとき，W_1，W_2 の体積の比を求めよ。 （京大－理系）

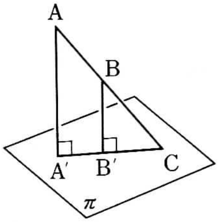
22 直線・平面・球

入試対策 空間での直線・平面・球の問題は，平面図形の場合と比べ，図を用いて直観的な視野で全体をとらえることが面倒である。見取図でもよいから，できるだけ図をかくこと。そして直線や平面の方程式がベクトルとどう結びついているかをつかむことが先決で，公式の確実な使用がキーポイントになる。その意味で点差が開きやすいことをねらって入試に多く出される。単純なものより総合化して出される傾向がある。問題を数多くこなし，その解法を１つ１つ自分で蓄積していくことである。

1st step

☞解答は「考え方と解答」144ページ

564 右図のように２点 A$(0,\ 2,\ 2)$，B$(1,\ 2,\ 3)$ と平面 π：$2x-2y+z=4$ がある。A′，B′ は π 上の点で，AA′ と BB′ は π に垂直であり，C は直線 AB と π の交点である。



(1) 直線 AB の方程式を求めよ。
(2) C の座標を求めよ。
(3) ∠ACA′ を求めよ。
(4) 直線 A′B′ の方程式を求めよ。

（九州産業大－工）

565 点 A$(1,\ 3,\ 1)$，B$(2,\ 1,\ 1)$，C$(4,\ 1,\ 1)$を通る平面 π と，D$(-3,\ -2,\ -11)$，E$(5,\ 4,\ 13)$を通る直線 l がある。E から π へおろした垂線と π の交点を P，P から l へおろした垂線と l の交点を Q とする。

(1) π の方程式を求めよ。
(2) l の方程式を求めよ。
(3) 線分 PQ の長さを求めよ。

（図書館情報大）

566 空間に２直線 l_1：$x+z=0$，$y=0$，l_2：$y+z=0$，$x=0$ がある。

(1) l_1，l_2 の方向ベクトルで，大きさが１のものをそれぞれ $\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ とする。$\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ の成分を求めよ。
(2) 直線 l_1，l_2 を含む平面を π とし，この平面に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}$ とする。$\vec{n}$ の成分と平面 π の方程式を求めよ。
(3) $\vec{n}$ に平行で，原点 O を通る直線を l とする。点 Q$(x,\ y,\ z)$ から l におろした垂線と l の交点を H とするとき，$|\overrightarrow{OH}|$ を求めよ。
(4) 点 Q$(x,\ y,\ z)$ の座標が $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=a^2$（$a$ は正の定数）の関係をみたすとき，$|\overrightarrow{HQ}|$ を a を用いて表せ。

（秋田大－鉱山）

567　点 P $(5,\ 4,\ 3)$ を通り方向ベクトルが $(2,\ 1,\ 1)$ の直線と，平面 α：$x+y+3z=12$ との交点をQとする。Qの座標は $(\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{})$ である。また，△PQR が正三角形となるような平面 α 上の点 R は 2 つあって，そのうちで，z 座標の値が大きい方の点の座標は $(\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{})$ である。

(近畿大－理工)

568　3 直線 l_1：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=z-4$，$l_2$：$\dfrac{x-2}{a^3}=\dfrac{y-3}{-b^2}=\dfrac{z-2}{b-1}$，$l_3$：$\dfrac{x-4}{-2a}=\dfrac{y-2}{b}=\dfrac{z-1}{a}$ と 3 点 A$(1,\ 2,\ 4)$，B$(2,\ 3,\ 2)$，C$(4,\ 2,\ 1)$ を通る平面 π がある。

(1)　π の方程式を求めよ。

(2)　l_1 は π 上にあることを証明せよ。

(3)　l_2，l_3 が π 上にあるように a，b の値を定めよ。

(4)　π と xy 平面のなす角の小さいほうを θ とするとき，$\cos\theta$ と $\tan 2\theta$ の値を求めよ。

(鳥取大－教育・農)

569　2 点 A$(1,\ 5,\ 4)$，B$(3,\ 8,\ -2)$ を端点とする線分 AB 上に点 P があり，AP：PB$=t$：$(1-t)$　$(0<t<1)$ とする。

(1)　線分 AB を直径とする球の方程式を求めよ。

(2)　P を通り，線分 AB に垂直な平面 α の方程式を t を用いて表せ。

(3)　(2)における α および xy 平面から，(1)で求めた球が切りとる円の面積をそれぞれ S_1，S_2 とするとき，$S_1 \leqq S_2$ となる t の範囲を求めよ。

(岩手大－農)

570　平面 α：$2x+2y-z-2=0$ と，球面 S：$(x-t)^2+(y-t^2-3)^2+(z-t^2)^2=4$ がある。

(1)　点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り α に直交する直線 l の方程式を求めよ。また，l と α の交点を H とするとき，PH の長さを求めよ。

(2)　α と S が共有点をもつような t の値の範囲を求めよ。

(3)　α と S が交わってできる円の半径の最大値を求めよ。

(香川大－教育・法・農)

571　球面 S：$x^2+y^2+z^2-2ax-2y+2az+2a^2-2=0$ と，平面 π：$x+y-z-2=0$ がある。ただし，a は定数とする。

(1)　S と π が接するときの a の値を求めよ。

(2)　π に接する S のうちで，球面 T：$x^2+y^2+z^2-6x-4y+11=0$ と交わるものに対し，その交わりを含む平面 α の方程式を求めよ。

(3)　α 上で T の内部に含まれる部分の面積を求めよ。

(横浜国大－教育)

2nd step

☞解答は「考え方と解答」145ページ

572 原点Oと3点A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 1)$，C$(0,\ 1,\ 2)$ が与えられている。

(1) △OABの面積を求めよ。

(2) 四面体OABCの体積を求めよ。

(3) 2点O，Aを通る直線と2点B，Cを通る直線の両方に垂直に交わる直線の方程式を求めよ。

（山梨大－工・教育）

573 平面 π：$x-y+z=0$ と直線 l_1：$\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-2}{3}$ がある。

(1) π と l_1 の交点Aの座標は $(\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{})$ である。

(2) l_1 上の任意の点Pから π におろした垂線PRを延長し，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をみたす点Qの集合が表す直線 l_2 の方程式は l_2：$\dfrac{x-\boxed{}}{\boxed{}}=\dfrac{y-\boxed{}}{\boxed{}}=z$ である。

(3) さらに，l_1 上の点B$(13,\ 12,\ 8)$ をとるとき，π に関しBと反対側にある l_2 上の点Cで，$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:2$ をみたすCの座標は $(\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{})$ であり，BCと π の交点Dの座標は $(\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{})$ である。

（慶大－総合政策）

574 t を実数とし，次の3平面 α，β，γ を考える。

$$\alpha：x+tz+2=0 \qquad \beta：x+y-1=0 \qquad \gamma：2x+y+tz+1=0$$

(1) α と β は交線をもつことを示せ。

(2) γ は α と β の交線を通ることを示せ。

(3) γ が α と β のなす角（鋭角）を2等分するように t の値を定めよ。

（大阪市大－理系）

575 2平面 α，β は直線 l：$x+\sqrt{3}y=0$，$z=0$ で交わり，点P$(1,\ \sqrt{3},\ 0)$ を中心とする半径1の球 S に接している。

(1) α，β の方程式を求めよ。

(2) α，β に関してPと対称な点C，Dをそれぞれ求めよ。

(3) 点Qは S 上を動き，点A，Bはそれぞれ α，β 上を動くとする。このとき，PA＋AQ＋QB＋BPの最小値を求めよ。

（和歌山県医大）

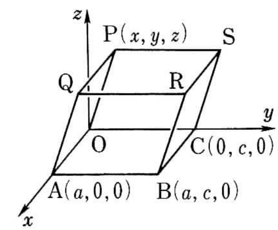
576 球面 S：$x^2+y^2+z^2+2y-4z-1=0$ と平面 $x+3y+z-5=0$ の交わりの円を C とする。

(1) C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) C 上の各点における S の接平面はある定点Aを含む。その理由を説明し，Aの座標を求めよ。

（慶大－経済）

577 Oを原点とする座標空間内に，4点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(a,\ c,\ 0)$，C$(0,\ c,\ 0)$，P$(x,\ y,\ z)$をとる。ここで，a，cは正の定数で，$z>0$とする。図のような，長方形OABCを底面とする平行六面体OABC-PQRSを考える。



(1) 直線ORと△QBSが直交する条件を求めよ。

(2) (1)の条件のもとで，zがとりうる最大値を求めよ。 (神戸大)

578 中心が原点O，半径が1である球面をSとし，S上に点P$(p,\ q,\ r)$ $(r \neq 0)$をとる。Oを通り$\overrightarrow{OP}$に垂直な平面をαとする。

(1) S上の点 A$(0,\ 0,\ -1)$からαにひいた垂線が再びSと交わる点をQとする。Qの座標をp，q，rで表せ。

(2) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AQ}$をみたす点Pの全体は1つの円をつくる。この円の中心の座標と半径を求めよ。 (室蘭工大)

579 直線lと球面Sが次の式で与えられている。

$$l: 2x+2=y+11=-2z+26 \qquad S: x^2+y^2+z^2=3$$

正三角形ABCの2つの頂点A，Bがl上にあり，もう1つの頂点CはS上にあるとする。

(1) 正三角形ABCの面積が最小になるとき，面積と3頂点A，B，Cの座標を求めよ。

(2) 正三角形を含む平面がSに接するとき，S上の頂点Cの座標を求めよ。 (弘前大)

580 点$(-2,\ 0,\ 1)$と点$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ -1)$を通る直線が球面$x^2+y^2+z^2=1$に接している。$r>0$として，$r$を$\theta$の関数で表せ。 (名大ー理系)

581 3点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 4,\ 0)$をそれぞれ中心とする3つの球が互いに外接するとき，

(1) 3つの球の半径を求めよ。

(2) 3つの球に同時に接する平面の方程式を求めよ。 (群馬大)

582 点Cを中心にもつ球面$x^2+y^2+2y+z^2=1$と接し，直線$x-1=\dfrac{y}{2}=z+1$を含む2つの平面の方程式を求めよ。また，このときの2つの接点をP，Qとするとき，△CPQの面積を求めよ。 (島根医大)