23 複素数と 2 次方程式

入試対策 複素数の計算では，ω と共役複素数 $\bar{z}$ についてのものが大部分で，これは複素数の性質に戻って考えれば必ず手はつけられる。2 次方程式では，判別式と「解と係数の関係」が中心で，応用も広く，入試でも多く出される。放物線のグラフとの関連で解法を考えることはとくに肝要である。基本の問題はいつでも解ける底力をもとにして，その応用がいつでも有効にはたらくような解決力を身につけなければならない。

1st step

☞解答は「考え方と解答」149ページ

583 (1) $x \neq 1$，$x^3=1$ のとき，$x^4+x^2+1=\boxed{}$ となる。また，この x の値は $x=\boxed{}$ である。
（東北工大）

(2) $x=a+b$，$y=a\omega+b\omega^2$，$z=a\omega^2+b\omega$ $\left(\text{ただし，}\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$ のとき，$x^3+y^3+z^3$ を a と b のみの式で表せ。
（高崎経済大）

584 α，β が複素数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$$

（昭和大－医）

585 $z=x+iy$ とし，$w=p+iq$ とする。ただし，x，y，p，q は実数で，$i^2=-1$ である。いま，$w=\dfrac{1}{1-z^2}$ であるとすれば，p と q は x，y を用いて $p=\boxed{}$，$q=\boxed{}$ と表される。さらに，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ のとき，q は θ を用いて $q=\boxed{}$ と表される。
（京都産業大－経営）

586 α，β，γ が複素数のとき，次のことを証明せよ。

(1) $\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta$ は実数である。

(2) $\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=\gamma\bar{\gamma}\neq 0$ ならば，$\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ は実数である。
（島根大－理系）

587 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$|x|$，$|1-\cos x-i\sin x|$，$|\tan x|$ を大きさの順に並べよ。（横浜市大－文理）

588 xの2次方程式 $x^2-2(m+2)x+m^2+3=0$ $(m\neq 0)$ について,

(1) 解が重解となるのは $m=\boxed{}$ のときであり，そのときの解は $x=\boxed{}$ である。

(2) 2つの解の比が 1：3 となるのは $m=\boxed{}$ のときであり，そのときの解は $x=\boxed{}$ と $x=\boxed{}$ である。

(3) 2つの解の差が1となるのは $m=\boxed{}$ のときであり，そのとき，小さいほうの解は $x=\boxed{}$ である。

(近畿大－商経)

589 2次方程式 $(x-1)(x-3)+x(x-2)+x^2-1=0$ の2つの解を α, β $(\alpha<\beta)$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}+\dfrac{\beta-2}{\alpha-2}$

(2) $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\dfrac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}$

(広島電機大)

590 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解を α, β とする。このとき，α^2, β^2 を解とする2次方程式は

$$x^2+(^{ア}\boxed{}b-a^{イ\boxed{}})x+b^{ウ\boxed{}}=0 \quad \cdots\cdots①$$

である。また，α^3, β^3 を解とする2次方程式は

$$x^2+(a^{エ\boxed{}}-{}^{オ}\boxed{}ab)x+b^{カ\boxed{}}=0 \quad \cdots\cdots②$$

である。$b\neq 0$ の場合に，①と②が同じ方程式となるのは，$b={}^{キ}\boxed{}$ で，

$$a={}^{クケ}\boxed{} \text{ または } a=\frac{^{コ}\boxed{}\pm\sqrt{^{サ}\boxed{}}}{^{シ}\boxed{}}$$

のときである。

(センター試験)

591 (1) 2次方程式 $8x^2-4x+a=0$ の2つの解が $\sin\theta$, $\cos\theta$ であるとき，aの値と $\sin^5\theta+\cos^5\theta$ の値を求めよ。

(大阪歯大)

(2) $0^\circ\leqq x\leqq 180^\circ$ のとき，方程式 $4\sin^2 x+4\cos x+4a-1=0$ が相異なる2つの実数解をもつように，aの値の範囲を定めよ。

(広島文教女大)

592 xの2次方程式 $x^2+(a+i)x+1-4i=0$ (aは実数の定数) が実数解をもつとき，その解は $\boxed{}$ であり，そのような解をもつのは $a=\boxed{}$ のときである。

(神戸学院大－法)

593 実数係数の方程式 $kx^2-(k+3)x-1=0$ が虚数解 $a\pm bi$ をもつとする。このとき，kの値の範囲は $\boxed{}$ であり，とくに解が純虚数となる場合の k の値は $\boxed{}$ である。また，$A=a^2+b^2$ のとりうる値の範囲は $\boxed{}$ である。

(慶大－経済)

594 $a^2+b^2 \leqq 1$ をみたす実数 a，b に対して，２次方程式 $x^2+2ax+b-1=0$ …① が与えられている。

(1) 方程式①は実数解をもつことを示せ。

(2) 方程式①の解を α，β とする。$\alpha=1$ のとき，β のとりうる値の範囲を求めよ。

（金沢大－理系）

595 ２つの放物線 $y=x(4-x)$，$y=2x^2+px+q$ が異なる２点で交わり，交点の座標は整数である。

(1) p，q について，不等式 $\boxed{}$ が成り立つ。また，交点の x 座標を α，β とすると，$\alpha+\beta=\boxed{}$，$\alpha\beta=\boxed{}$ が成り立つ。

(2) p，q が関係式 $p^2-4q=1$ をみたすとき，(1)の不等式から p についての２次不等式がえられ，その解は $\boxed{}$ である。さらに，p，q が整数であるとき，$(p,\ q)=(\boxed{},\ \boxed{})$ または $(\boxed{},\ \boxed{})$ である。

（京都産業大－経営）

596 a，b は実数で，２次方程式

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots\cdots①, \qquad ax^2+bx+1=0 \quad \cdots\cdots②$$

が実数解 λ を共通にもてば，$\lambda=\boxed{}$ かつ $a+b=\boxed{}$ である。また，①と②が実数でない解を共通にもてば，$a=\boxed{}$ かつ $b=\boxed{}$ である。

（東大－文科）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」152ページ

597 ２つの複素数 z，z_1 が $|z|=1$，$|z_1| \neq 1$ をみたすとき，$\dfrac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$ の絶対値を求めよ。

（神戸商船大）

598 任意の複素数 $z=x+yi$ において，$N(z)=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくものとする。２つの複素数 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$（a，b，c，d は実数）について，次の式を証明せよ。

(1) $N(\alpha\beta)=N(\alpha)\cdot N(\beta)$

(2) $N(\alpha+\beta) \leqq N(\alpha)+N(\beta)$

（東京女大）

599 複素数 z（ただし，$z^2 \neq -1$）について，

(1) $|z|=1$ ならば，$\dfrac{z}{1+z^2}$ は実数になることを証明せよ。

(2) 逆に，$\dfrac{z}{1+z^2}$ が実数になるための条件を求めよ。

（福岡大－理）

600 x は実数，z と α はともに複素数で，$|z|=1$，$\alpha \neq 0$ とする。このとき，$x(z-1)+\alpha=0$ をみたす x，z を α，$\bar{\alpha}$ を用いて表せ。

（千葉大－文系）

601 ω を $x^3=1$ の複素数解の1つとするとき，

(1) ω を用いて x^2+xy+y^2 を x，y に関する1次因数に分解せよ。

(2) $\omega^{2n}+\omega^n$ の値を求めよ。n は整数とする。

(3) n が奇数のとき，$(x+y)^n-x^n-y^n$ は x^2+xy+y^2 で割り切れるか。また，その理由を(1)，(2)の結果を用いて述べよ。 （香川大）

602 複素数 $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$ について，次の(1)，(2)を証明せよ。

(1) すべての正整数 n に対して $\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=\alpha^n+\beta^n-2(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$ が成り立つ。

(2) すべての正整数 n に対して $\alpha^n+\beta^n$ は奇数である。 （名大－文系）

603 複素数 $z=x+iy$ に対して，$w=az^2+bz$（a，b は実数，$a\neq0$）とおく。

(1) w が実数となるような z の集合を求めよ。

(2) z がこの集合の上を動くとき，w はすべての実数値をとることを証明せよ。 （東京工大）

604 m，n を正の整数とする。x についての2次方程式 $12x^2-mx+n=0$ の2つの実数解を小数第2位で四捨五入して 0.3 および 0.7 をえた。m，n を求めよ。 （一橋大）

605 2次方程式 $x^2-ax+b=0$ の2つの解は $\cos\theta$，$\sin\theta$（$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$）で与えられるものとする。

(1) a が最小となるのは，θ が何度のときか。

(2) $b=\dfrac{2a-1}{4}<0$ となるのは，θ が何度のときか。 （青山学院大－国際）

606 x の2次方程式 $2x^2+2(a^2-3a)x+a^4-6a^3+9a^2-4=0$ について，

(1) この方程式が2つの正の解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) この方程式の2つの正の解のうち大きいほうを p とする。a が(1)の範囲を動くとき，p の範囲を求めよ。 （浜松医大）

607 (1) 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ は正の解を少なくとも1つもつ。点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

(2) 2次方程式 $3x^2+8x\cos\theta+8\sin\theta=0$ が正の解を少なくとも1つもつような θ の範囲を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。 （同志社大－経済）

608 a，b が任意の定数（ただし，$a \neq b$）のとき，２次方程式 $3(a-b)x^2+6bx-a-2b=0$ は，0と1の間に少なくとも1つの解をもつことを示せ。 （お茶の水女大－理）

609 u，v を実数とし，x の２次方程式 $x^2-2ux+1-v^2=0$ の実数解を α，β（$\alpha \leqq \beta$）とする。$|\alpha|+\beta<4$ が成立するとき，点（u，v）のとりうる領域を求め，図示せよ。 （同志社大－法）

610 ２次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ に関する次の命題のうち，a，b，c が複素数であっても成り立つものはどれか。

ア．$b^2-ac>0$ ならば，相異なる実数解をもつ。

イ．$b^2-ac=0$ ならば，重解をもつ。

ウ．２つの解を α，β とすれば，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ となる。

エ．$b^2-ac \geqq 0$，$\dfrac{b}{a}<0$，$\dfrac{c}{a}>0$ ならば，２つの解はともに正である。 （一橋大）

611 (1) m，n は整数，m^2+n^2 が4の倍数ならば，m，n はともに偶数であることを示せ。

(2) a，b は整数，p，q は有理数，$q \neq 0$ かつ $p+qi$ が方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるならば，p，q はともに整数であることを示せ。 （明治大－理工）

612 a, b が実数のとき，２次方程式 $x^2-ax+b=0$ の解の絶対値がすべて１より小となるための点（a，b）の存在範囲を図示せよ。 （早大－教育）

613 x に関する２次方程式 $2x^2+3ax+a^2-a=0$ が，絶対値１の解を少なくとも１つもつように，実数 a の値を定めよ。 （同志社大－工）

614 ２次方程式 $az^2+z+1=0$ が実数解をもつときでも虚数解をもつときでも，２つの解の絶対値がともに２より小となる実数 a の範囲を求めよ。 （千葉大－理系）

615 ２次方程式 $ax^2+x+1=0$ の任意の解（虚数解の場合も含む）を α とするとき，$|\alpha+1|=1$ となるための a の値の範囲を求めよ。ただし，a は実数の定数である。 （弘前大）

24 高次方程式

入試対策　高次方程式の基本は3次式，4次式の因数分解である。そのためには因数定理や剰余の定理の正しい理解が必要である。また，これに関連して整式の問題が数多く出される。たくさんの問題の徹底的な演算によってその解法のパターンを記憶するしか手がない。

3次方程式では必ず複素数との関連が現れる。とくに1の虚数3乗根 ω の扱いは，くり返してよく学習し，自分のものとしておくことが大切である。

1st step

☞解答は「考え方と解答」156ページ

616　整数 $f(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの商を $g(x)$，余りを $x+2$ とするとき，

(1)　$f(x)$ を $g(x)$ で表せ。

(2)　さらに，$f(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りが7であるとき，$g(3)$ の値を求めよ。

(3)　$f(x)$ を x^2-4x+3 で割ったときの余りを求めよ。　　(広島県大)

617　整式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を x^2-1 で割ると余りは $10x+11$，x^2+x+1 で割ると余りは -6 である。a，b，c，d を求めよ。　　(東京理大－基礎工)

618　a, b, p, q は実数で，$a>0$ とする。2次方程式 $x^2+ax-2a-4=0$ の2つの解 ${}^{ア}\boxed{}$ と $-a-{}^{イ}\boxed{}$ が3次方程式 $x^3+px^2+qx-4a-8=0$ の解であるならば，この3次方程式のもう1つの解は ${}^{ウエ}\boxed{}$ であり，$p=a+{}^{オ}\boxed{}$，$q={}^{カキ}\boxed{}$ である。

さらに，$x^2+bx-a^2=0$ の2つの解が，上の3次方程式の解であるならば，$a=b$ のとき $a=b={}^{ク}\boxed{}+\sqrt{{}^{ケ}\boxed{}}$，$a\neq b$ のとき $a={}^{コ}\boxed{}$，$b={}^{サ}\boxed{}$ である。　　(センター試験)

619　x の3次方程式 $x^3+7x^2-7x+a=0$ (a は実数の定数) の1つの解が $x=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0^\circ<\theta<90^\circ,\ i=\sqrt{-1})$ と表されるとき，$\theta=\boxed{}^\circ$ であり，この方程式の実数解は $x=\boxed{}$ である。　　(千葉工大)

620　x の3次方程式 $x^3+(1-2a)x^2+(a^2-a+1)x-a=0$ がただ1つの実数解をもつための実数 a の値の範囲を求めよ。ただし，重解は1つとかぞえる。　　(滋賀大－教育)

621 (1)　3次方程式 $3x^3+(9\sqrt{2}-11\sqrt{6})x^2+6(10-11\sqrt{3})x+180\sqrt{2}=0$ は3つの実数解 α，β，γ をもち，$\alpha:\beta:\gamma=6:(-3\sqrt{3}):5$ である。このことを利用してこれらの解を求めると，$\alpha=\boxed{}$，$\beta=\boxed{}$，$\gamma=\boxed{}$ である。

(2)　(1)で求めた α，β，γ に対して，$\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}=\boxed{}$ である。　（駿河台大－経済）

622 (1)　$-1+\sqrt{11}\,i$　$(i=\sqrt{-1})$ が方程式 $x(x^2-3x+2)=12a$ の解であるように実定数 a を定め，残りの解をすべて求めよ。

(2)　不等式 $x(x^2-3x+2)\leqq 60$ を解け。　（近畿大－九州工）

623 4次方程式 $x^4+2ax^3+(a^2+3)x^2+3ax+2=0$ の虚数解の個数が2であるような実数 a の値の範囲を求めよ。　（関西大－文）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」157ページ

624 $P(x)$ は x についての整式であり，次の2つの性質をもつとする。

(i)　$P(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りは $2x+3$ である。

(ii)　$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは1である。

(1)　$P(x)$ を x^3-2x^2-x+2 で割ったときの余りを求めよ。

(2)　とくに，$P(x)$ が x についての3次式である場合，$P(x)$ を x^2+1 で割ったときの余りは定数であるという。このときの $P(x)$ を求めよ。　（神戸学院大－薬）

625 2つの方程式 $x^2+ax+2=0$，$x^3+ax^2+bx+1=0$ が共通解をもつための必要十分条件は，a，b が $\boxed{}b^2-ab+\boxed{}a-\boxed{}b+\boxed{}=0$ をみたすことである。

また，$b=\boxed{}$ のときは，どんな a に対しても共通解をもたない。　（日本大－文理）

626 3次方程式 $x^3+3x^2-1=0$ の1つの解を α とする。

(1)　$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ を $a\alpha^2+b\alpha+c$ の形の式で表せ。ただし，a，b，c は有理数とする。

(2)　上の3次方程式の α 以外の2つの解を(1)と同じ形の式で表せ。　（東大－文科）

627 方程式 $x^3-x+k=0$　$(k>0)$ が絶対値1の虚数解をもつとき，この方程式の3つの解を求めよ。　（東京工大）

628 p，a，b を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) α が方程式 $x^3+px+1=0$ の解であるとき，$-\alpha$ は方程式 $x^3+px-1=0$ の解であることを示せ。

(2) $\alpha=a-bi$ $(b\neq 0,\ i=\sqrt{-1})$ が方程式 $x^3+px+1=0$ の解であるとき，方程式 $x^3+px-1=0$ の実数解を求めよ。 （東北工大）

629 3次方程式 $x^3+ax^2+(1-b)x+(1-b^2)=0$ の3つの解を α，βi，$-\beta i$ $(i=\sqrt{-1})$ とする。ただし，a，b，α，β はいずれも実数で，$\beta\neq 0$ とする。このとき，

(1) $b<1$ であることを示し，次に a，b の間に成り立つ関係を求めよ。

(2) 実数解の値の範囲を求めよ。 （慶大－商）

630 次の4次方程式の4つの解のうち，2つだけが等しくなるように m の値を定めよ。

$$x^4+(2m-1)x^3-(3m-3)x^2-(5m+17)x+(6m+14)=0$$

（茨城大－教育）

631 $pq<0$ のとき，次の x についての4次方程式は相異なる4個の実数解をもつことを証明せよ。

$$(x^2-px-q^2)(x^2-qx-p^2)=0$$

（明治薬大）

632 $f(x)=x^2-x+\dfrac{1}{2}$ のとき，4次方程式 $f(f(x))=(1-a)x^2-bx-\dfrac{15}{4}$ （a，b は実数の定数）の x^3 の係数は $\boxed{}$，定数項は $\boxed{}$ である。

また，この方程式が2つの異なる実数解をもち，さらに，それらの解がともに重解であるとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ となる。このとき，この方程式の解のうち最大なものは $\boxed{}$ である。

（早大－商）

633 a を実数とする。

(1) 方程式 $x^4+2ax^2-a+2=0$ が実数解をもたないような a の範囲を求めよ。

(2) x^4+2ax^2-a+2 の最小値を $m(a)$ とする。a が(1)の範囲内にあるとき，$m(a)$ の最大値を求めよ。 （京大－教育）