25 複素数平面

入試対策 ここは微分積分につぐ入試の最重点項目で，理系では必出，文系でも数多く出題される。①極形式に関する問題では，ド=モアブルの定理の徹底理解が必要である。小問や穴うめの狙い場所で，レベルはそれほど高くない。問題解決のスピードが要求される。②複素数平面の図形の問題では，解法も1通りとは限らない。かなりの応用力が必要。「図形と方程式」の項との関連を計りながら，幅の広い多角的な勉強が合格につながる。

1st step

☞解答は「考え方と解答」160ページ

634 (1) 2つの複素数 $\alpha=\sqrt{3}-i$，$\beta=1+\sqrt{3}i$ について，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の絶対値と偏角を求めよ。 （北海道工大）

(2) n が正の整数のとき，$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n}+\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n}$ を簡単にせよ。 （日本大－農獣医）

635 $z_1=2-\sqrt{3}a+ai$ と $z_2=\sqrt{3}b-1+(\sqrt{3}-b)i$ との絶対値が等しく，$\dfrac{z_2}{z_1}$ の偏角が 90° となるように実数 a，b の値を定めよ。 （新潟大－理系）

636 α，β が複素数で，$|\alpha|=2$，$|\beta|=1$，$|\alpha+\beta|=\sqrt{3}$ であるとき，

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。

(2) n が正の整数のとき，$|\alpha^n-\beta^n|$ を求めよ。 （大阪外語大）

637 $z_1=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，$z_2=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ であるとき，次の式で表される複素数 z の絶対値と偏角を求めよ。ただし，$0°<\alpha<180°$，$0°<\beta<180°$ とする。

$$z=\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}$$

（奈良教育大）

638 次の3つの条件に適するような2つの複素数 z_1，z_2 を求めよ。

$$|z_1|=2,\quad |z_2|=3,\quad 3z_1+2z_2=6$$

（埼玉大－文系）

639 すべての整数 n について，

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad (i \text{ は虚数単位})$$

が成り立つことを，次の順序で証明せよ。ただし，$(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$ とする。

(1) n が正の整数のとき成り立つことを数学的帰納法で示せ。

(2) n が 0 のとき，および n が負の整数のとき成り立つことを示せ。 (佐賀大，東京女大)

640 方程式 $z+\dfrac{1}{z}=1$ がある。

(1) z を極形式で表せ。

(2) n が正の整数のとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ の値を求めよ。 (近畿大－薬)

641 3 つの複素数 $z_1=1+i$，$z_2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$，$z_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}i$ について，

(1) z_3-z_1，z_2-z_1 をそれぞれ極形式で表せ。

(2) $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ の偏角を求めよ。

(3) $\triangle z_1z_2z_3$ はどのような三角形か。 (広島工大)

642 複素数平面上の正方形において，1 組の隣り合った 2 頂点が 0 と $2+3i$ であるとき，他の 2 頂点を表す複素数を求めよ。 (東海大－工)

643 複素数平面上で，複素数 α，β，γ を表す点が正三角形の頂点をなすとき，

(1) $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$ の値を求めよ。

(2) (1)の値を z とおくとき，z のみたす実数係数の 2 次方程式を求めよ。

(3) α，β，γ の間に成り立つ実数係数の 2 次の関係式を導け。 (東邦大－医)

644 複素数平面の原点を O とし，複素数 z_1，z_2 を表す点をそれぞれ A，B とする。$\overrightarrow{OA}$ を 90°，$\overrightarrow{OB}$ を $-90°$ だけ回転してそれぞれ $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ をつくる。

(1) 終点 C，D の表す複素数を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ との間にどんな関係があるか。

645 (1) 複素数 $1+i$ の極形式を求めよ。

(2) 複素数平面上で，2点 P，Q を表す複素数をそれぞれ z，$(1+i)z$ とする。このとき，△OPQ はどんな形の三角形か。ただし，O は原点である。

(3) (2)の結果を用いて複素数 $(1+i)^2z$，$(1+i)^3z$ を表す点 R，S を求める方法を示せ。

（秋田大）

646 複素数平面上で，3個の点 $3+3i$，$-5i$，$-2+i$ を頂点とする平行四辺形の第4の頂点を表す複素数のうち，絶対値が最小のものを求めよ。（一橋大）

647 複素数 z が $|z|=1$ をみたすとき，次の複素数 w は，それぞれ複素数平面上でどんな図形をえがくか。

(1) $w=z+\dfrac{1}{z}$　　(2) $w=\dfrac{1}{z+1}$　（和歌山県医大）

648 z が複素数平面上の円 $|z-1-i|=1$ の上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ をみたす w の軌跡を求め，かつ，その概形をかけ。（福岡教育大）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」162ページ

649 (1) $a+\dfrac{1}{a}=1$ のとき，複素数 a を極形式で表せ。

(2) n が正の整数のとき，$a^n+\dfrac{1}{a^n}$ は ±1，±2 以外の値をとらないことを示せ。（福井大）

650 絶対値が1で，偏角が α である複素数 z に対し，$w=1-z$ とおく。ただし，$0^\circ<\alpha<360^\circ$ とする。

(1) w を極形式で表せ。

(2) $w^2-4z\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=4$ であるような α の値を求めよ。（金沢大）

651 α は与えられた複素数とする。どんな実数 t に対しても，複素数

$$\alpha\cos t+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\sin t$$

の絶対値がつねに一定であるとき，

(1) α を求めよ。

(2) 複素数　$\alpha\cos t+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\sin t$ を極形式で表せ。（岡山大－理系）

652 $0^\circ<\alpha<108^\circ$，$0^\circ<\beta<72^\circ$ のとき，次の式をみたす α，β の値を求めよ。

$$(\cos\alpha+i\sin\beta)^2=\frac{1}{2\sqrt{2}}+i(\sqrt{2}+2\sin\alpha\cos\beta)$$

（東北大）

653 (1) $(\cos A+i\sin A)(\cos B+i\sin B)(\cos C+i\sin C)=\cos(A+B+C)+i\sin(A+B+C)$ を証明せよ。ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。

(2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$，$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ であるとき，次式を証明せよ。

$$\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

（金沢大）

654 α，β は複素数で，$|\alpha|=|\beta|=1$，$|\alpha+\beta|=\sqrt{3}$ であるとき，

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。

(2) $\dfrac{\beta^2}{\alpha+\beta}=p\alpha+q\beta$ をみたす実数 p，q を求めよ。 （新潟大－理系）

655 等比数列 z_1，z_2，z_3，…，z_n，… において

$$z_1=1,\quad z_2=a+ib,\quad z_3=b+ia$$

である。ただし，a，b は実数で $a>0$，i は虚数単位である。

(1) a，b の値を求めよ。また，z_2 を極形式で表せ。

(2) $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n=0$ をみたす n の値のうち，最小のものを求めよ。また，この n の値に対する積 $z_1\times z_2\times z_3\times\cdots\times z_n$ の値を計算せよ。 （九　大）

656 複素数 z が $z\bar{z}+(1+i)z+(1-i)\bar{z}+1\leqq0$ をみたすとき，偏角 $\arg(z-\sqrt{2})$ はどのような範囲にあるか。 （愛知工大）

657 複素数平面上で，$1+\sqrt{3}i$ の表す点をA，原点をOとする。また，$|z+2|=1$ であるような複素数 z の表す点をPとする。OA，OPを隣り合う2辺とする平行四辺形OAQPをつくり，その対角線OQを1辺とする正三角形OQRをつくる。Pが $|z+2|=1$ の表す図形上を動くとき，

(1) 点Qはどのような図形をえがくか。

(2) 点Rはどのような図形をえがくか。 （東北大）

658 複素数平面上で-1, 1, z を表す点をそれぞれA, B, Pとする。$\dfrac{z-1}{z+1}=ti\ (t>0)$ であるとき,

(1) $\angle$APB を求めよ。

(2) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき, Pはどんな曲線をえがくか。 (岡山大)

659 複素数 $z=x+iy$ の平方を $w=z^2$ とする。z が集合

$$\{z \mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$$

の範囲を動くとき, w はどんな範囲を動くか, 図示せよ。 (学習院大－理)

660 複素数 $z=x+iy$ が不等式 $2\leqq z+\dfrac{4}{z}\leqq 5$ をみたすとき, 点$(x,\ y)$の存在する範囲を図示せよ。 (津田塾大)

661 α, β は $\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$ を満足する0と異なる複素数とする。

(1) $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ を求めよ。

(2) $\arg\alpha-\arg\beta$ を求めよ。

(3) 複素数平面上で α, β を表す点をそれぞれA, B, 原点をOとするとき, △OAB はどのような形か。 (東京水産大)

662 $|z|^2+|w|^2=1$ をみたす複素数 z, w に対して, $u=1+i+2zw$ とする。

(1) z, w が実数値のみをとって動くとき, u を表す点は複素数平面上で, どんな線をえがくか。図示せよ。

(2) z, w が複素数であるとき, u を表す点の存在する領域を複素数平面上に図示せよ。

(北大－理系)

663 複素数平面上において, 0でない複素数 $z=x+iy$ (x, y は実数で, $y>0$) を表す点をPとする。原点をOとし, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をOのまわりに正の向きに30°だけ回転してえられるベクトルの終点をQとする。

(1) Qの座標を求めよ。

(2) Qを表す複素数を w とするとき, $\dfrac{1}{w}$ を表す点をRとして, Rの座標を求めよ。

(3) △OPR が正三角形になるとき, z を求めよ。 (横浜市大－商)