3 確率，期待値

入試対策　サイコロ投げ，硬貨投げ，トランプカード，赤球白球などと確率問題の材料はいくらでもある。しかし基本となるのは場合の数の求め方であって，樹形図をかくなどの方法で題意を正しく把えることが大切である。微分の利用，log の計算，極限値を求める，ベクトルとからむものなど，実戦では多様に出題されるが，本節では数学 I，数学 A の範囲に絞ってある。Σ の計算が多用されるが，これはとくに注意して勉強されたい。加法定理でいくか乗法定理でいくかの区別は，問題解決のためのキーポイントである。

1st step

☞解答は「考え方と解答」17 ページ

59　袋の中に赤球 3 個と白球 7 個とが入れてある。この中から任意の 3 個を同時にとり出すとき，3 個が白球ばかりである確率は $\boxed{}$，3 個が同色の球である確率は $\boxed{}$，3 個中に赤球も白球も含まれる確率は $\boxed{}$ である。（岡山商大）

60　1 から 9 までの数字カード 9 枚がある。このうちから任意に 1 枚ずつ 3 枚をとり出し，順に並べて 3 桁の整数をつくるとき

(1)　その 3 桁の整数が偶数になる確率を求めよ。

(2)　その 3 桁の整数が 3 の倍数になる確率を求めよ。（名古屋女大）

61　サイコロを 6 回ふる。次の各事象の確率を求めよ。

(1)　1 の目が 1 回も出ない。

(2)　出た目の最大数が 3 である。

(3)　1，2，3，4，5，6 の目がすべて出る。（東海大－教養）

62　サイコロ 3 個を同時にふるとき，出た目の数の和が 12 になる確率を求めよ。（立教大－理）

63　1 個のサイコロを 2 回投げるとき，1 回目に出る目を a とし，2 回目に出る目を b とする。このとき，方程式 $ax^2+bx+1=0$ が実数解をもつような a，b が出る確率は $\boxed{}$ であり，有理数解をもつような a，b が出る確率は $\boxed{}$ である。（神戸女子薬大）

64 2つのサイコロを同時に投げる試行を考える。A は少なくとも1つ1の目が出る事象，B は出た目の和が奇数となる事象である。

(1) 次のそれぞれの場合が起こる確率を求めよ。

(i) A　(ii) $A\cap B$　(iii) $A\cup B$　(iv) $A\cap\overline{B}$　(v) $\overline{A}\cap B$

(2) A，B のどちらか一方だけが起こる事象を A，B，$\cup$，$\cap$，$\overline{}$ を用いて表せ。また，その事象が起こる確率を求めよ。（奈良女大）

65 箱の中に赤玉が4個，白玉が4個，青玉が6個入っている。

(1) この箱の中から5個の玉を同時にとり出すとき，その中に赤玉が1個，白玉が2個，青玉が2個入っている確率は $\boxed{}$ である。

(2) この箱の中から玉を1個とり出してはもとに戻すという操作を5回くり返したとき，赤玉が1回，白玉が2回，青玉が2回とり出される確率は $\boxed{}$ である。（東京理大－理工）

66 2つのサイコロA，Bをふり，出る目をそれぞれ a，b とするとき，${}_{10}\mathrm{C}_a<{}_{10}\mathrm{C}_b$ となる確率は $\boxed{}$ であり，$3\times{}_{10}\mathrm{C}_a<{}_{10}\mathrm{C}_b$ となる確率は $\boxed{}$ である。（神戸女子薬大）

67 (1) 白い玉を2個，黒い玉を2個，全部で4個の玉を円周上に並べる。このとき，同じ色の玉が隣り合わない確率を求めよ。

(2) 赤い玉を2個，青い玉を2個，黄色い玉を2個，全部で6個の玉を円周上に並べる。このとき，同じ色の玉が隣り合わない確率を求めよ。（東北大－理系）

68 半径1の円に内接する正十角形の頂点を1つずつ選んでいく。まず，10個の頂点から勝手に1つの頂点を選び，それを P_1 とする。次に，残りの9個の頂点から勝手に1つの頂点を選び，それを P_2 とする。以下これをくり返して，頂点 P_3，P_4 を選ぶ。

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ が円の直径になる確率を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ が直角三角形である確率を求めよ。

(3) P_1，P_2，P_3，P_4 の中の3頂点を結んでえられる三角形の中に少なくとも1つは直角三角形がえられる確率を求めよ。（千葉大）

69 (1) 区別のつかない n 個の玉を異なる r 個の箱へ入れるとき，全部で何通りの場合があるか。

(2) (1)のすべての場合が等確率で起こるとしたとき，r 個のどの箱にも少なくとも1個の玉が入る確率を求めよ。ただし，$n>r$ とする。（横浜市大－文理・医）

70 2人のプレーヤーAとBが硬貨投げを行う。このとき，硬貨の表と裏が出る確率は同じであるとする。最初A，Bそれぞれの所持金は6ドルであり，1回投げるたびに，表が出ればAはBから1ドルもらい，裏が出ればAはBに1ドル渡すと約束する。

(1) 硬貨を5回投げて表が2回出る確率は$\boxed{}$である。

(2) 硬貨を5回投げて表が2回出た場合，Aの所持金は$\boxed{}$ドルになる。

(3) 硬貨を5回投げて，その結果，Aの所持金の期待値は$\boxed{}$(ドル)である。

(近畿大－理工)

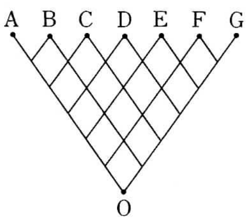
71 1からn ($n \geqq 3$) までの自然数を1つずつ書いたn枚のカードがある。その中から，でたらめに3枚のカードを同時にとり出すとき，それら3枚のカードに書いてある数の中で一番小さい数をX_1，2番目に小さい数をX_2，残りの数をX_3とする。さらに，$Y=X_3-X_1$とする。

(1) $n=5$のとき，$X_2>Y$となる確率を求めよ。

(2) 一般のnに対して，$Y=k$となる確率$P(Y=k)$ ($k=2, 3, \cdots, n-1$)とYの期待値$E(Y)$を求めよ。ただし，必要なら$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$を用いてよい。

(北大－理系)

72 右図の点Oから出発し，公正な銅貨を投げて，表なら斜め右上へ，裏なら斜め左上へ1つずつ進むものとする。



(1) 点Dに到達する確率を求めよ。

(2) 点Dに線分ODより左側には行かずに到達する確率を求めよ。

(3) 点Dに到達すれば得点5，点B，C，E，Fのいずれかに到達すれば得点 −1，点Aまたは点Gに到達すれば得点10がえられるものとする。得点の期待値(平均)を求めよ。

(九大－法・経済)

2nd step

☞解答は「考え方と解答」19ページ

73 a，bを1から6までの自然数とする。2個のサイコロC，Dを投げて，それぞれの目の数c，dが$ad-bc=0$をみたす確率を$p(a, b)$で表す。

(1) $p(1, 1)$を求めよ。さらに，$k=2, 3, \cdots, 6$に対して$p(1, 1)=p(k, k)$を示せ。

(2) $p(1, 2)$を求め，$p(1, 2)=p(a, b)$となるような(a, b)をすべて求めよ。

(奈良女大)

74 数字1，2，3を1つずつ書いた3枚のカードがある。これをよく切って1枚ひき，またもとに戻すという試行をn回($n \geqq 3$)行う。n回やっても1度も出ない数字がある確率をp_n，n回目にはじめて数字1，2，3が全部出そろう確率をq_nとする。

(1) p_3，p_4，q_3，q_4を求めよ。

(2) p_n，q_nを求めよ。

(三重大－工・医)

75　仲の良い4人の友達A，B，C，Dがクリスマスパーティでプレゼントを交換する。つまり，4人の持ち寄ったプレゼントを公平な抽選で分けるのである。このとき，

(1)　A君が自分自身の持ってきたプレゼントに当たる確率を求めよ。

(2)　A君にはB君の持ってきたプレゼントが当たり，残りのB，C，Dのうちの誰かが自分自身の持ってきたプレゼントに当たる確率を求めよ。

(3)　自分自身の持ってきたプレゼントに誰も当たらない確率を求めよ。　（九大－文系）

76　1から n までの n 個の自然数から1つ選ぶことを，A君とB君がそれぞれに行う。選ばれた数を X，Y とするとき，

(1)　$X+Y$ が偶数になる確率を求めよ。

(2)　$|X-Y|>k$ となる確率を求めよ。k は $0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数である。　（福井医大）

77　表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ である硬貨を $2n$ 回投げるとき，表が r 回以上出る確率を a_r，表が s 回以下出る確率を b_s とする。

(1)　$n=1$ のとき，a_1，b_1 を求めよ。

(2)　$a_n=b_n$ を示せ。

(3)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left\{1-\dfrac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2}\right\}$ を示せ。　（群馬大）

78　サイコロをくり返し n 回ふって，出た目の数を掛け合わせた積を X とする。すなわち，k 回目に出た目を Y_k とすると，$X=Y_1Y_2\cdots Y_n$

(1)　X が3で割り切れる確率 p_n を求めよ。

(2)　X が4で割り切れる確率 q_n を求めよ。　（京大－文系）

79　袋の中に番号0，1，2，…，$n-1$ のついた札がそれぞれ1枚ずつ入っている。この袋から2枚の札をとり出したとき，それらの札の番号の和を n で割った余りが k である確率を求めよ。ただし，$n \geqq 2$，$0 \leqq k \leqq n-1$ とする。　（一橋大）

80　1個のサイコロを100回つづけて投げるとき，1の目が n 回出る確率を $p(n)$ で表すことにする。ただし，n は $0 \leqq n \leqq 100$ なる整数とする。

(1)　$p(n)$ の値を n を用いて求めよ。

(2)　n が $0 \leqq n<100$ なる整数のとき，$p(n)<p(n+1)$ なる n の値の範囲，および $p(n)>p(n+1)$ なる n の値の範囲を求めよ。

(3)　$0 \leqq n \leqq 100$ なる整数 n のうち，$p(n)$ の値を最大にするような n の値を求めよ。

（近畿大－理工）

81 ある工場で大量に生産される部品Aに不良品が含まれる確率をpとする。いま，この部品を3個抜きとって，その中に不良品が多くとも1個見つかる確率をp_1，またこの部品を6個抜きとって，その中に不良品が多くとも2個見つかる確率をp_2とするとき，$p_2<p_1$となるpの範囲を求めよ。（同志社大－工）

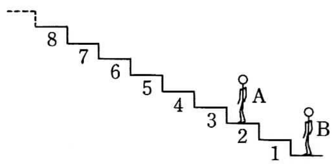
82 面積1の正五角形の頂点を順にA，B，C，D，Eとする。△ABCの面積をS_1とし，それに合同な三角形を5個つくる。また，△ACDの面積をS_2とし，それに合同な三角形を3個つくる。この合計8個の三角形から任意に3個とり出し，その面積の和をX，Xの期待値$E(X)$を$E(X)=\alpha S_1+\beta S_2$とおく。

(1) α，βを求めよ。

(2) 線分ACと線分ABの長さの比を求めよ。

(3) $E(X)$の値を求めよ。（熊本大－理系）

83 かなりの段数のある石段があり，右図のようにAは下から2段目，Bは最下段にいる。Aは毎回確率$\dfrac{1}{2}$で1段，確率$\dfrac{1}{2}$で2段登り，Bは毎回確率$\dfrac{1}{3}$で1段，確率$\dfrac{2}{3}$で2段登る。2人は同時に登りはじめた。



(1) A，Bそれぞれが4回登ったとき，ともに7段目にいる確率を求めよ。

(2) 4回登ったとき，AがX段目，BがY段目にいるとする。$Y-X$の期待値を求めよ。（名古屋市大－医）

84 サイコロをn回投げる。ただし，$n\geqq 2$とする。そして次のルールで得点を与える。

(i) 1の目が2回以上出た場合には，得点－30点を与える。

(ii) 上記以外の場合には，サイコロを投げるたびに，1の目が出れば－10点，1以外の目が出れば10点を与えて，n回の合計を得点とする。

nを$n\geqq 2$の範囲で変化させるとき，得点の期待値を最大にするnを求めよ。（慶大－医）

85 1からnまでの相異なるn個の自然数（$n\geqq 4$）の中から無作為に2個をとり出し，大きい方をX_1，小さい方をY_1とする。次に残りの（$n-2$）個の自然数の中から無作為に2個をとり出し，大きい方をX_2，小さい方をY_2とする。次の期待値を求めよ。

(1) X_1+Y_1　(2) X_1　(3) Y_2（京大－理系）