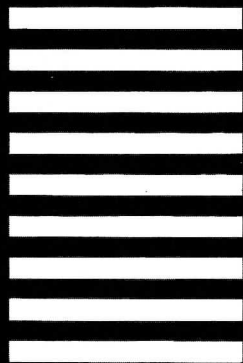


数学A



5

数と式 (1)

入試
対策

ここでは数学 A の範囲にとどめたために、虚数 i を含めた計算、因数定理や剰余の定理に関する整式の扱いは原則として入れてない。総合的な入試準備のためには、当然のことだがそこまで広げて勉強しなければならない。式の計算は他の領域の問題解決の基礎となるものが多く、問題によって解き方のパターンはみな違う。それらの基本的な手法を確実にマスターしてほしい。



1st step

☞ 解答は「考え方と解答」31 ページ

115

次の式を因数分解せよ。

- (1) $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$ (岐阜女大)
- (2) $bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$ (久留米大一文)
- (3) $x^2 + 3y^2 + 4xy - 6x - 12y + 9$ (福岡大一商)
- (4) $48x^4 - 243$ (武蔵大一経済)
- (5) $p^4 + p^2 - 2ap - a^2 + 1$ (札幌大一経済)

116

(1) $abc \neq 0, a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (i) $bc + ca + ab$
- (ii) $a^4 + b^4 + c^4$
- (iii) $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ (阪南大一経済)

(2) $\alpha + \beta + \gamma - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 3, \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma = -2, \alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = 1$ のとき、

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \square, \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \square, |(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)| = \square$$

(東京理大一理)

117 $xyz=1$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\frac{2(xy+x+1)z}{xz+z+1}$

(2) $\frac{x}{xy+x+1} + \frac{y}{yz+y+1} + \frac{z}{zx+z+1}$

(日本社会事業大)

118 (1) 整式 $x^3+ax^2+bx+b-1$ が $(x-1)^2$ で割り切れるならば、 $a=\square$ 、 $b=\square$ である。
(近畿大-工)

(2) 実数係数の 2 次の整式 $f(x)=x^2+ax+b$ があり、 $f(x^2)$ は $f(x)$ で割り切れるとする。
 $f(x)$ を求めよ。
(名城大-理工)

119 (1) $A=x^3+ax^2+bx+c$ 、 $B=x^3+dx^2+ex+f$ の最大公約数が x^2+2x-3 、最小公倍数が $x^4-15x^2-10x+24$ のとき、 $a=\square$ 、 $b=\square$ 、 $c=\square$ 、 $d=\square$ である。ただし、 $f>0$ とする。
(拓殖大)

(2) 整式 $f(x)$ を x^4+2x^3+5x+2 で割ったときの余りは $x^3-4x^2-11x+3$ で、
 x^2+3x+1 で割ったときの商は $2x^3+x^2+2x-1$ であった。このとき

$$f(x) = \square x^5 + \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$$

(慶大-環境情報)

120 (1) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$ のとき、

$$f(x)^2 = \frac{\square}{(x+1)^2} + \frac{\square}{(x+2)^2} + \frac{\square}{(x+3)^2} + \frac{\square}{x+1} + \frac{\square}{x+2} + \frac{\square}{x+3}$$

(近畿大-理工)

(2) $\frac{x^2-29x+10}{x^3+8} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4}$ (a, b, c は定数) のとき、 $a=\square$ 、 $c=\square$

(千葉工大)

(3) $\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$ (A, B, C は定数) のとき、 $A+B-C=\square$

(神奈川大-工)

121 $x+1$ で割ると -3 余る整式 $f(x)$ が恒等式

$$x^5+ax^3+bx^2+cx=(x-1)^2f(x) \quad (a, b, c \text{ は定数})$$

をみたすとき、 $a=\square$ 、 $f(x)=\square$ である。

(芝浦工大)

122 $f(x)$ は x に関して 3 次の整式で、 $f(-2)=0$ 、 $f(-1)=-6$ 、 $f(1)=0$ 、 $f(2)=6$ のとき、
 $f(0)=\square$ である。
(大阪産業大-経済)

- 123** $f(x) = x^2 + ax + b$ とする。 $\{f(x)\}^2$ を $x^2 + 1$ で割ると 1 余り、その商がすべての実数 x に対して正の値をとるとき、 $(a, b) = \square$ である。(福岡工大)
- 124** a ($a \neq 0$), b, c を定数とし、 x の整式 $P(x), Q(x)$ をそれぞれ

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad Q(x) = a\{P(x)\}^2 + bP(x) + c$$
とする。整式 $Q(x) - P(x)$ を整式 $P(x) - x$ で割った余りを求めよ。(同志社大-商)

2nd step

☞ 解答は「考え方と解答」33 ページ

- 125** n が正の整数であるとき、 $S_n = \alpha^n + \beta^n$ において、 $S_1 = 1, S_2 = -1$ である。次の値を求めよ。
 (1) $S_1 + S_3 + S_5$
 (2) $S_n + S_{n+1} + S_{n+2}$ (福井工大)
- 126** r を実数とし、変数 x, y の 2 次式 $(r+1)x^2 + (r-1)y^2 - 2r$ が 1 次式の積に因数分解できるような r の値をすべて求めよ。(都立大-文系)
- 127** x の 3 次式

$$f(x) = ax^3 + (a^2 + b)x^2 + (2ab + c)x + a^2 + b^2 - a$$

$$g(x) = ax^3 + (a^2 - b)x^2 + (a - 1)x + c^2 - b^2$$
 および x の 2 次式

$$h(x) = x^2 + ax + b$$
 を考える。 $(a, b, c$ は定数, $a \neq 0)$
 $f(x), g(x)$ はともに $h(x)$ で割り切れるか、または、ともに $h(x)$ では割り切れないかのいずれかであることを示せ。(京大-理系)
- 128** $f(x)$ と $g(x)$ を 2 つの実数係数の多項式とする。
 (1) $f(x) + g(x), f(x)g(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの余りはそれぞれ $x - 1, -3x$ である。このとき、 $f(x)$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの余りは $\square x + \square$ または $\square x + \square$ である。
 (2) さらに、 $f(x), g(x)$ はともに 3 次式で、その最小公倍数が $2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$ であるとすると、 $f(x) = \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$ または $f(x) = \square x^3 + \square x^2 + \square x + \square$ である。(慶大-総合政策)

- 129** 相異なる実数 x, y, z が、 $x(1-y) = a, y(1-z) = a, z(1-x) = a$ をみたすとき、 a の値を求めよ。また、 y, z を x の式で表せ。(富山大-理系)

130 次の分数式が既約分数式でないような定数 a の値を求め、そのときの分数式を約分せよ。

$$\frac{x^3 - ax^2 + 12x - a - 3}{x^3 - (a+1)x^2 + 16x - a - 6} \quad (\text{京大-法})$$

- 131 (1) 実数 a, b が $ab=1$ をみたすとき、 $a+b$ の範囲を求めよ。
 (2) $abc=1$ なる 3 実数 a, b, c がある。 $a+b+c=bc+ca+ab$ ならば、 a, b, c のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを示せ。
 (3) また、このとき、 $a+b+c$ のとる範囲を求めよ。 (神戸女大)

132 実数 a, b に対し、 $f(x)=x^2+ax+b, g(x)=f(f(x))$ とする。

- (1) $g(x)-x$ は $f(x)-x$ で割り切れることを示せ。
 (2) $g(p)=p$ かつ $f(p) \neq p$ をみたす実数 p が存在するような点 (a, b) の範囲を図示せよ。 (京大-理系)

- 133 (1) 恒等的に $h(x+1)=h(x)$ が成り立つような整式 $h(x)$ をすべて求めよ。
 (2) 恒等的に $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=0$ が成り立つような整式 $f(x)$ をすべて求めよ。
 (3) $f(x)=x^2, x^3$ のとき、 $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$ をそれぞれ求めよ。
 (4) $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=6x+4$ を恒等的にみたし、 $f(0)=1, f(1)=2$ をみたす整式 $f(x)$ を求めよ。 (京都府医大)

134 $a < 0, c > 0$ として、2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x+1)+f(x-1)-2f(x)$ を計算せよ。
 (2) ある数 p について、集合 $\{f(p-1), f(p), f(p+1)\}$ が集合 $\{p-2, p, p+2\}$ と一致しているとき、 $f(p)=p+2$ を示し、このときの a の値を求めよ。
 (3) p が整数で(2)の条件をみたし、さらに $f(p+1)=p, f(p-1)=p-2$ となっているとき、 b, c および p の値を求めよ。 (北大-理系)

135 n は正の整数とする。 n 次式 x^n を 2 次式 $f(x)=x^2-ax+b$ で割った余りを r_nx+s_n とおく。

- (1) すべての正の整数 m, n について、次の式が成り立つことを示せ。

$$r_{m+n} = r_m s_n + r_n s_m + a r_m r_n, \quad s_{m+n} = s_m s_n - b r_m r_n$$

- (2) $(a-x)^n$ を $f(x)$ で割った余りを t_nx+u_n とおくと、次の式が成り立つことを示せ。

$$t_n = -r_n, \quad u_n = a r_n + s_n \quad (\text{阪大-理系})$$

6

数と式(2)

**入試
対策**

出題頻度の高い順に書くと、整数の性質に関するもの、方程式にかかわるもの、その他となる。一見やさしく見えるが意外に手ごわい。公式を使って統一的に解くという方法はきかない。場合に応じて既得の学力がどう生かされるか、結局は幅広い勉強の積み重ねにつきる。証明問題の多いのも特徴で、証明の書き方をくり返し練習することが必要である。

1st step

⇨ 解答は「考え方と解答」36 ページ

- 136** (1) 整数の2乗を7で割った余りは0, 1, 2, 4に限られることを示せ。 (日本大-理工)
 (2) 整数 53^{99} の1の位の数求めよ。 (自治医大)
 (3) 2進法の小数1.0111を10進法の既約分数に直せ。 (近畿大-九州工)
- 137** (1) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}=a+b\sqrt{5}$ をみたす有理数 a, b は $a=\square, b=\square$ (足利工大)
 (2) $x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}, y=\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ のとき、 $x^3+y^3=\square, xy=\square$ であるから、 $x+y=\square$ となる。 (大阪産業大-工)
 (3) $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ が、整数 a と絶対値が1より小さい実数 b によって $a+b$ と表されるとき、 $\frac{1}{b}-a$ の値を求めよ。 (学習院大-経済)
- 138** 整数 p, q に対して $p \circ q = p(p+q) + 3$ を考える。
 (1) $a \circ 2 = 18$ をみたす a を求めよ。
 (5) $b \circ (b \circ 2) = 2$ をみたす b を求めよ。 (成蹊大-経済)
- 139** (1) 200以下の自然数で、次の3つの条件をすべてみたすものを全部求めよ。
 (ア) 5の倍数である。
 (イ) 4で割ると余りが2である。
 (ウ) 2つの平方数の和である。 (会津大)
 (2) ある自然数を平方したとき、100の位以下(下3桁)が296であった。この自然数の100の位以下を求めよ。 (武蔵工大)

- 140** (1) $\frac{4x^3+9x+5}{4x^2-1}$ が整数となるような整数 x の値をすべて求めよ。 (福井工大)
- (2) $2xy+y-2x^2+x-515=0$ をみたす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。 (立命館大-経済)
- 141** (1) $xy-2x-3y=0$ をみたす自然数で、 $|x-y|$ が最大になるのは $x=\square$, $y=\square$ (東海大-政経)
- (2) $2x+25y=1993$ をみたす整数 x, y のうち、 x と y の差の絶対値が最も小さいものを求めよ。 (お茶の水女大-理)
- 142** 整数 m, n は等式 $3m^2+28m+6n+3=0$ をみたしている。
- (1) m は 3 の倍数であって、6 の倍数ではないことを証明せよ。
- (2) この等式をみたす整数の組 (m, n) のうち、 n が正となるものをすべて求めよ。 (大阪市大-商・経済)
- 143** (1) y が整数のとき、 y^2+2 は 5 で割り切れないことを示せ。
- (2) $5x^2-2y^2=4$ をみたす整数 x, y は存在しないことを示せ。 (都立大-文系)
- 144** 自然数 a, b が $123456789=(11111+a)(11111-b)$ をみたしているとする。このとき、
- (1) $a-b>0$ であることを示せ。
- (2) $a-b$ は偶数であることを示せ。
- (3) さらに、 $a-b$ は 4 の倍数であることを示せ。
- (4) $a-b<10$ となるような組 (a, b) をすべて求めよ。 (信州大-理・経済)
- 145** (1) $x^3-3nx^2+(3n^2-1)x-(n^3-n)$ を因数分解せよ。
- (2) n を奇数とし、 $f(x)=x^3-3nx^2+(3n^2-1)x$ とおく。どんな偶数 m に対しても $f(m)$ は 24 で割り切れることを証明せよ。 (茨城大-教育)
- 146** x^2-8x+1 が整数の平方となるように、 x の整数値を定めよ。 (滋賀大-経済)

- 147** $f(n) = n(n+2)(n+4)$ とする。
- (1) n が正の奇数のとき、 $f(n)$ と 192 との最大公約数を求めよ。
- (2) n が正の偶数のとき、 $f(n)$ は 48 の倍数であることを示せ。
- (3) n が正の偶数のとき、 $f(n)$ と 192 との最大公約数となりうる整数をすべて求めよ。また、それぞれの整数について、その整数を与える n の最小値を求めよ。(成城大-法)
- 148** 3桁の整数の、100の位、10の位、1の位の数をそれぞれ a, b, c とする。
 a, b, c が $a+c=b, a>c>0$ の関係のみたすとき、
- (1) このような3桁の整数は何個存在するか。
- (2) このような3桁の整数で $2^m p$ の形に表されるものを求めよ。ただし、 m は自然数、 p は3以上の素数である。(専修大-経済)
- 149** (1) 自然数 a, b はともに3で割ると1余る。このとき、積 ab も3で割ると1余ることを示せ。
- (2) 3で割ると2余る自然数 a の素因数のうち少なくとも1つは3で割ると2余ることを示せ。(京都教育大)

2nd step

⇨ 解答は「考え方と解答」39ページ

- 150** $A = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{27}+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{18}}}$ とすると、 $A^4 = \square$ となる。
- また、 $B = \sqrt{\frac{4}{\sqrt[3]{9}-2} + 8\sqrt[3]{9}}$ とすると、 B より大きな最小の自然数は \square で、 $A \leq N \leq B$ をみたす自然数 N は全部で \square 個ある。(日本大-農獣医)
- 151** $\frac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分の桁数と、1の位の数字を求めよ。ただし、 $3^{21} = 10460353203$ を用いてもよい。(東大-理科)
- 152** 整数 α は、十進法で $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ と表されている。(各 a_k は0から9までの数字、ただし最高位の数字 $a_n \neq 0$)
- (1) α が十進整数99で割り切れるためには、 $\beta = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ が9で割り切れ、かつ $\gamma = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n$ が11で割り切れることが必要十分であることを示せ。
- (2) β を9で割ったときの余りが6、 γ を11で割ったときの余りが3であるとき、 α を99で割ったときの余りを求めよ。(立教大-理)

- 153** (1) 10 の倍数ではない 4 桁の正の整数で, 99 で割り切れるものはいくつあるか。
 (2) 10 の倍数ではない 4 桁の正の整数が 99 で割り切れるとき, この整数を逆の順序に並べかえた 4 桁の整数も 99 で割り切れることを示せ。 (関西大-法)
- 154** 自然数 n の最大の素因数 (約数のうち素数で最大のもの) を $f(n)$ とする。
 (1) $f(30) = \square$, $f(31) = \square$, $f(32) = \square$ である。
 (2) 集合 $\{f(n) \mid 30 \leq n \leq 50\}$ の要素の個数は \square で, 要素の最大値は \square , 最小値は \square である。 (東海大-海洋)
- 155** $f(x)$ を 2 次式とする。もし, $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ が整数ならば, 任意の整数 n に対して $f(n)$ は整数であることを示せ。 (東京女大-文)
- 156** $0 < a \leq b \leq 1$ をみたす有理数 a , b に対し, $f(n) = an^3 + bn$ とおく。このとき, どのような整数 n に対しても $f(n)$ は整数となり, n が偶数ならば $f(n)$ も偶数となるような a , b の組をすべて求めよ。 (金沢大-理)
- 157** 相異なる 2 つの素数 p , q に対して, $px^2 + qx$ が整数となるような有理数 x をすべて求めよ。 (都立大-文系)
- 158** n を正の整数とする。
 (1) n^2 と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。
 (2) n^2+2 が $2n+1$ の倍数になる n を求めよ。 (一橋大)
- 159** a を実数とする。次の 2 つの式を同時にみたす整数 x , y があるとき, a の値を求めよ。

$$2x + ay = 0, \quad (a+2)x - y = 4$$
 (信州大-理・経済)
- 160** 2 次方程式 $ax^2 - bx + 3c = 0$ において, a , b , c は 1 桁の自然数であり, 2 つの解 α , β は $1 < \alpha < 2$, $5 < \beta < 6$ をみたす。このとき, a , b , c の値を求めよ。 (京大-理)

- 161 n を自然数とするとき、
- (1) 2^4 を 5 で割った余りを求めよ。さらに、 2^{4^n} , $2^{4^{n+1}}$, $2^{4^{n+2}}$, $2^{4^{n+3}}$ のそれぞれを 5 で割った余りを求めよ。
 - (2) $1^{4^n} + 2^{4^n} + 3^{4^n} + 4^{4^n}$ が 5 で割り切れないことを示せ。
 - (3) n が 4 の倍数でないとき、 $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ は 5 で割り切れることを示せ。 (足利工大)
- 162 負でない整数の組 x_0, x_1, x_2, x_3 が $x_{n+1} = x_n^3 + 1$ ($n=0, 1, 2$) をみたすとき、次のことを示せ。
- (1) $0 \leq n \leq 2$ に対し、 $x_n x_{n+1}$ は 2 で割り切れる。
 - (2) x_1 を 9 で割った余りは 0, 1, 2 のいずれかである。
 - (3) $x_1 x_2 x_3$ は 18 で割り切れる。 (阪大-理系)
- 163 自然数 n に対して n 以下の自然数で n との最大公約数が 1 であるものの個数を $f(n)$ で表す。
- (1) $f(12)$, $f(13)$, $f(16)$ を求めよ。
 - (2) m が n 未満の自然数で、 m と n の最大公約数が 1 であるとき、 $n-m$ と n の最大公約数も 1 であることを示せ。
 - (3) $n \geq 3$ のとき、 $f(n)$ は偶数であることを示せ。 (埼玉大-理工)
- 164
- (1) m, n は $m < n$ をみたす自然数で、 m は n の約数であるとする。このとき、 m は $n-m$ の約数であることを示せ。
 - (2) p は素数、 n は $p < n$ をみたす整数であるとする。 $\frac{n}{n-p}$ が整数になるのは、 n が $p+1$ か $2p$ に等しい場合に限ることを示せ。
 - (3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, $a \leq b \leq c$ をみたす自然数 a, b, c の組をすべて求めよ。 (京都教育大)
- 165
- (1) α, β を互いに素な正の整数とする。
 - (i) $\alpha x - \beta y = 0$ の整数解をすべて求めよ。
 - (ii) $\frac{\alpha}{\beta} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}$ (a_1, \dots, a_4 は正の整数) と書けるとする。 $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$ を通分してえられる分子 $a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3$ を p , 分母 $a_2 a_3 + 1$ を q とするとき、 $\alpha q - \beta p$ の値を求めよ。
 - (2) $157x - 68y = 3$ の整数解をすべて求めよ。 (早大-理工)