7 式と証明，命題，条件

入試対策 等式・不等式の証明，命題，必要条件と十分条件の3つの分野は，解決への筋道がわかりにくいことが多く，だいたい敬遠されがちのようである。しかし，大部分の問題は集合の考えが根本にあって，それをつかめば容易に処理できるものである。出題範囲も数の性質から方程式，不等式，関数，図形など広汎にわたるので，それらの完全理解を計ることが第一である。解き方の手法をきっちりと身につけるような勉強が大事である。

1st step

☞解答は「考え方と解答」43 ページ

166 $x:y:z:w=a:b:c:d$ のとき，次式が成立する。ただし，a，b，c，d，x，y，z，w は正の実数で，$x \neq a$ とする。

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}+\frac{z^4}{c^4}+\frac{w^4}{d^4}=4\cdot\left(\frac{x+y+z+w}{a+b+c+d}\right)^{\boxed{}}$$

（立正大－経営）

167 a，b，c，d は0でない実数で，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$ をみたすものとする。このとき，$ab+bc+cd=3ad$ であることを証明せよ。（甲南大－理）

168 $a>0$，$d>0$ とする。$a_1=a$，$a_2=a+d$，$a_3=a+2d$，$a_4=a+3d$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_4}>\frac{4}{a_1+a_4}$

(2) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}>\frac{8}{a_1+a_4}$ （熊本工大）

169 (1) 等式 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ を証明せよ。

(2) x，y，z を正の実数とするとき，$\frac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$ であることを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。（滋賀医大）

170 x，y，z，u がすべての正の実数であるとき，$\frac{x^2+y^2+z^2+u^2}{4} \geqq \sqrt{xyzu}$ であることを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x=y=z=u$ の場合に限られることを示せ。（創価大）

171 (1) 自然数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ をみたすとき，a，b のうち少なくとも1つは3の倍数であることを証明せよ。 （関西学院大－法）

(2) 正の整数 x，y が $x^2=2y^2+1$ をみたすとき，次のことを証明せよ。

(i) x は奇数である。

(ii) y は偶数である。 （福岡大－理）

172 (1) 有理数の定義を述べよ。

(2) 命題「x が3と異なる有理数ならば $\dfrac{5x-2}{x-3}$ は有理数である」を証明せよ。

(3) 上の(2)の命題の対偶と逆を述べよ。 （岡山理大－理）

173 「整数 n が6の倍数であり，かつ8の倍数であれば，n は48の倍数である」の否定命題を述べ，えられた命題が正しいかどうかを判定せよ。 （信州大－経済）

174 $|x|=1$ であるための必要条件と十分条件を，次の中からすべて書き出せ。

(a) $x\geqq 1$　(b) $x=1$　(c) $x\leqq 1$　(d) $x\geqq -1$　(e) $x=-1$

(f) $x\leqq -1$　(g) $x^2=1$ （工学院大）

175 次の $\boxed{}$ に適するものを下の①～④の中から1つだけ選べ。

(1) $X\subset(A\cup B)\cup C$ であることは $X\subset(A\cup B)\cap C$ であるための $\boxed{}$。

(2) 実数 x, y について，$x^2+y^2+2x-4y<0$ であることは $|x+2|+|y-1|<1$ であるための $\boxed{}$。

(3) 実数 a，b について，a^2+b^2 が4の倍数であることは，a，b がともに偶数であるための $\boxed{}$。

(4) 実数 x，y について，$x+y=3$ であることは $x^2-y^2-3x+3y=0$ であるための $\boxed{}$。

① 必要十分条件である。　② 必要条件であるが十分条件でない。

③ 十分条件であるが必要条件でない。　④ 必要条件でも十分条件でもない。

（神戸女子薬大）

176 (1) 実数 x に対して $x^2+2x+3+\dfrac{4}{x^2+2x+3}$ は $x=\boxed{}$ のとき最小値をとる。 （福岡工大）

(2) $x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4x}{x^2+1}$ $(x>0)$ の最小値を求めよ。 （自治医大）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」45 ページ

177 正数 a, b に対し，$a*b$ を $a*b=\dfrac{ab}{a+b+1}$ と定義する。正数 a, b, c に対し，次の(1), (2)を証明せよ。

(1) $a*b=a*c$ ならば $b=c$

(2) $(a*b)*c=a*(b*c)$ （熊本工大）

178 文字がすべて正数であるとき，次の(1), (2)を証明せよ。

(1) $m+n=1$ ならば，$\dfrac{m}{a}+\dfrac{n}{b}\geqq\dfrac{1}{am+bn}$ である。

(2) $p+q+r=1$ ならば，$\dfrac{p}{a}+\dfrac{q}{b}+\dfrac{r}{c}\geqq\dfrac{1}{ap+bq+cr}$ である。 （福井工大）

179 (1) $x+y=a$ のとき，x^2+y^2 と $\dfrac{a^2}{2}$ の大小関係を調べよ。

(2) $x+y+z+u=a$ のとき，$x^2+y^2+z^2+u^2$ と $\dfrac{a^2}{4}$ の大小関係を調べよ。 （愛知学院大－歯）

180 (1) a, b を正の数とするとき，不等式 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqq 2$ を証明せよ。

(2) a_1, a_2, $\cdots$, a_n を n 個の正の数とするとき，次の不等式を数学的帰納法によって証明せよ。

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2$$

(3) 三角形の 3 つの辺の長さを a, b, c とし，$a+b+c=2s$ とおくとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geqq 6$$

（大分医大）

181 「n 個の任意の正の数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n について $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqq\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ が成り立つ」という命題を $P(n)$ とする。

(1) $P(2)$ が正しいことを証明せよ。

(2) $P(k)$ が正しいとき，$P(2k)$ も正しいことを証明せよ。

(3) $P(k+1)$ が正しいとき，$P(2k)$ も正しいことを証明せよ。 （横浜国大－経営）

182 (1) m, n は自然数とする。$m>n$ のとき $2^{\frac{n}{m}}$ は無理数であることを示せ。

(2) $2^{\frac{1}{3}}$ は有理数を係数とする 2 次方程式の解にならないことを示せ。 （大阪市大－理）

183 a，b を正の定数とするとき

(1) $|x+y|+|x-y|<a$ ならば，$|x|+|y|<a$ であることを示せ。

(2) $|x|+|y|<a$ ならば，$x^2+y^2<a^2$ であることを示せ。

(3) 「$x^2+y^2<a^2$ ならば $|x+y|+|x-y|<b$ である」という命題が真であるために正の定数 a，b がみたす関係を求めよ。（信州大－経済）

184 次の文中の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①～④のうちから選べ。

(1) $|x|=2$ であることは，$x^2-4x+4=0$ であるための ${}^{ア}\boxed{}$

(2) a，b を実数とする。2次方程式 $x^2-ax-b=0$ について，$b>0$ であることは，この方程式が正と負の実数解をもつための ${}^{イ}\boxed{}$

(3) $a>2$，$b>2$ であることは，$ab>a+b$ であるための ${}^{ウ}\boxed{}$

(4) 整式 $P(x)$ が x^2 で割り切れることは，$\{P(x)\}^2$ が x^3 で割り切れるための ${}^{エ}\boxed{}$

(5) 四角形 ABCD について，$\sin A=\sin C$，$\sin B=\sin D$ であることは，四角形 ABCD が平行四辺形であるための ${}^{オ}\boxed{}$（ただし，4つの内角はいずれも 180°より小さいとする。）

① 必要十分条件である。

② 必要条件であるが，十分条件ではない。

③ 十分条件であるが，必要条件ではない。

④ 必要条件でも十分条件でもない。（センター試験）

185 条件 p，q に関し，次の①～⑦から最も適するものを選べ。（$\bar{\mathrm{p}}$ は p の否定を表す。）

① p は q であるための必要条件　② p は q であるための十分条件

③ p は q であるための必要十分条件　④ $\bar{\mathrm{p}}$ は q であるための必要条件

⑤ $\bar{\mathrm{p}}$ は q であるための十分条件　⑥ $\bar{\mathrm{p}}$ は q であるための必要十分条件

⑦ 上のどれでもない

(1) p：$k>1$　q：円 $x^2+y^2-2x=0$ と直線 $y=2x+k$ は共有点をもつ

(2) a，b，c が実数のとき，

$$\mathrm{p}:\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}=1 \quad \mathrm{q}:a,\ b,\ c \text{ のいずれかは自然数である}$$

（慶大－総合政策）

186 k は0または正の整数とする。方程式 $x^2-y^2=k$ の解 $(a,\ b)$ で，a，b がともに奇数であるものを奇数解とよぶ。

(1) 方程式 $x^2-y^2=k$ が奇数解をもてば，k は8の倍数であることを示せ。

(2) 方程式 $x^2-y^2=k$ が奇数解をもつための必要十分条件を求めよ。（京大－教育・経済）