8　数　列

入試対策　等差数列，等比数列，階差数列，群数列が本節の範囲である。これらの数列でもっとも誤りやすいのは一般項や和を表すときの n と $n-1$ で，これが正しく使えればとくに面倒な内容はない。階差数列や群数列でもただ頭の中だけで考えないで，具体的に紙の上に数列を書き並べてみる。そこから解き方のヒントをえることが多い。数列の問題は Σ に始まって Σ に終わる。公式の正しい理解と計算力が最重要課題である。

1st step

☞解答は「考え方と解答」47 ページ

187　(1)　初項 20，公差 -3 の等差数列で，初項から第 n 項までの和 S_n を n を用いて表すと $S_n=\boxed{}$ であり，S_n が最大になるときの n の値は $\boxed{}$，S_n の最大値は $\boxed{}$ である。

（足利工大，宮崎大）

(2)　第 10 項が 79，第 15 項が 54 である等差数列 $\{a_n\}$ で，一般項 a_n を求めよ。また，この数列の初項から第 n 項までの和 S_n が最大値をとるような n の値を求めよ。（奈良女大）

188　a，n を正の整数とする。連続する n 個の整数 a，$a+1$，…，$a+n-1$ の和が 100 になるような a，n の組をすべて求めよ。（鳴門教育大）

189　等差数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{21}=-2$ をみたすとき，

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　$a_n \geqq 0$ であるような最大の n を求めよ。

(3)　$b_n=na_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として得られる数列 $\{b_n\}$ の初項から第 k 項までの和を S_k とおくとき，S_1，S_2，S_3，… の最大値を求めよ。（新潟大）

190　$\{a_n\}$ は自然数からなる数列で，初項 a_1 は 20 とし，$n \neq 5$ のとき $a_n > a_5$ であるとする。さらに，$b_n=a_{n+1}-a_n$ で定まる数列 $\{b_n\}$ が公差 2 の等差数列であるとする。このとき $\{a_n\}$ を求めよ。（茨城大－理）

191　初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n は，$S_n=an^2+bn$（a，b は定数）で表される。この数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。（秋田大－教育）

192　初項 a $(a>0)$，公比 r の等比数列がある。この数列の初項から第 n 項までの中で最大数は 96 であり，その和は 189 である。また，初項から第 $2n$ 項までの和は 12285 である。このとき，この数列の初項 a は $\boxed{}$ で，公比 r は $\boxed{}$ である。（東京理大－薬）

193　初項が 3，公比が r の等比数列の第 4 項までの和が 468 であるとき，$r=\boxed{}$ である。この数列の第 n 項までの和を S_n と書くとき，$S_1+S_2+\cdots+S_n=\boxed{}$ である。ただし，r は実数である。（神戸女子薬大）

194　初項 1，公比 $\sqrt{7}$ の等比数列が 10^{100} 以上の値をとるのは第何項以降か。ただし，$\log_{10}7$ は小数第 4 位以下を切り捨てると 0.845 となる。（東邦大－理）

195　一般項が $a_n=(\sin\theta)^{-2n+51}$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ で表される等比数列を $\{a_n\}$ とし，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの積 $b_n=a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n$ を一般項とする数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　$\theta=30^\circ$ のときの $\{a_n\}$ の公比を求めよ。

(2)　$\{b_n\}$ が最小の項となるときの n を求めよ。

(3)　$\{b_n\}$ がはじめて 1 より大きな項となるときの n を求めよ。（星薬大）

196　放物線 p：$x^2-ky=0$ と直線 l：$x+2y-3k=0$ が与えられている。(k は正の整数)

(1)　放物線 p に接し，直線 l に直交する接線の方程式および接点 A の座標を求めよ。

(2)　接線および直線 l の x 軸との交点をそれぞれ B, C とするとき，△ABC の面積 S_k を求めよ。

(3)　$\sum_{i=1}^{n} S_{2i-1}>500$ となる最小の n を求めよ。（鳥取大－教育・農）

197　xy 平面上に点 $P_0(0,\ 0)$，$P_1(1,\ 0)$ がある。点列 P_n $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ を次のようにとる。

(i)　線分 $P_{n-1}P_n$ の長さは線分 $P_{n-2}P_{n-1}$ の長さの 2 倍。

(ii)　点 P_n は P_{n-2} から P_{n-1} に向かう方向に対して左側にある。

(iii)　$\angle P_{n-2}P_{n-1}P_n=90^\circ$

このとき，点列 P_{4n-2} $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ の x 座標を n を用いて表せ。（群馬大）

198　点 $(0,\ r_1)$ を中心とした半径 r_1 の円 C_1 がある。この C_1 に対して，円 C_2 を C_1 と外接し，x 軸に接するようにとる。次に，円 C_3 を 2 円 C_1，C_2 と外接し，x 軸に接するようにとる。これら 3 つの円 C_1，C_2，C_3 の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 $(r_1>r_2>r_3)$ とする。

(1)　r_3 を r_1 と r_2 で表せ。

(2)　r_1，r_2，r_3 がこの順序で等比数列をなすとき，その公比を求めよ。（千葉大）

199 第 n 項 a_n が $a_n=-n^2-n+20$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) S_n が最大となるときの n の値を求めよ。

(2) $S_n \geqq 0$, $S_{n+1}<0$ となる n の値，およびそのときの S_n の値を求めよ。

（高知大ー理・教育・農）

200 数列 $\{a_n\}$ は初項1，公差2の等差数列，数列 $\{b_n\}$ は初項1，公比2の等比数列とする。$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ のとき，$S_{10}-3=\boxed{}$ である。

（大阪電通大）

201 数列 $\{a_n\}$ において，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5^{-k}k(k+1)a_k=2\left(n+\frac{1}{4}\right)^2$ が成り立っている。このとき，

(1) a_n を n の式で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

（弘前大）

202 数列 1^2, 2^2-1^2, $3^2-2^2+1^2$, $4^2-3^2+2^2-1^2$, $5^2-4^2+3^2-2^2+1^2$, …の一般項 a_n は $\boxed{}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\boxed{}$ である。

（福岡大ー人文）

203 分数を次のように並べた数列を考える。

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{5}{6},\ \cdots$$

(1) $\dfrac{18}{25}$ は初めから数えて第何項目にあるか。

(2) 初めから数えて第666項目にある分数は何か。

(3) 初項から第666項目までの和を求めよ。

（岩手大ー農）

204 $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots$ は，$\dfrac{1}{2^{k-1}}$ が 2^{k-1} 個（$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）ずつ続く数列である。このとき

(1) 第1000項までの和は $^{ア}\boxed{}+\dfrac{^{イウエ}\boxed{}}{2^{^{オ}\boxed{}}}$ である。

(2) 第 n 項までの和が100であるとき，$n=2^{^{カキク}\boxed{}}-{}^{ケ}\boxed{}$ であるから，n は $^{コサ}\boxed{}$ 桁の数である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

（センター試験）

2nd step

☞解答は「考え方と解答」51ページ

205　正の整数の等差数列 $\{a_n\}$ において，a_{170} は13の倍数，a_1 と a_2 の最小公倍数が1118，$\sum_{k=1}^{10} a_k=1025$ とする。この数列 $\{a_n\}$ の初項および公差を求めよ。また，$\sum_{k=1}^{n} a_k=3750$ となる n の値を求めよ。　　　　（立命館大－理工）

206　等差数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_1>a_2$ および自然数 p に対し $(a_{3p})^2=4$ をみたすとき，

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　$a_n \geqq 0$ であるような最大の n を求めよ。

(3)　$b_n=na_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ としてえられる数列 $\{b_n\}$ の初項から第 k 項までの和を S_k とおくとき，S_1，S_2，S_3，$\cdots$ の最大値を求めよ。　　　　（新潟大）

207　$\{a_k\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする。m を自然数とし，$b_k=a_k a_{k+1}\cdots a_{k+m-1}$ とおく。数列 $\{b_k\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。　　　　（筑波大）

208　$\{a_n\}$ を初項 a，公比 r $(a\neq 0,\ r\neq 0,\ r\neq 1)$ の等比数列とする。正の整数 m に対して

$$b_n=na_na_{n+1}+(n+1)a_{n+1}a_{n+2}+\cdots+(n+m-1)a_{n+m-1}a_{n+m}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって数列 $\{b_n\}$ を定めるとき，$\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。　　　　（南山大－経済）

209　数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，$S_n=\alpha a_n$ $(n=2,3,4,\cdots)$ をみたす。ただし，$\alpha\neq 1$，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n\geqq 1)$ とする。このとき，$\{a_n\}$ は $n\geqq 2$ に対し，公比 $\dfrac{\boxed{}\alpha+\boxed{}}{\boxed{}\alpha-\boxed{}}$ の等比数列であり，$|r|<1$ となるのは $\alpha<\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ のときである。

また，数列 $\{S_n\}$ は，$\sum_{k=1}^{n} S_k=\boxed{}+\boxed{}\alpha+\boxed{}\alpha S_n$ $(n\geqq 1)$ の関係をみたす。

さらに，$\alpha=-9$ のとき，$\sum_{k=1}^{n} S_k$ が初めて7より大きくなるのは，$n=\boxed{}$ のときである。必要ならば，$\log_{10}3=0.4771$ を用いよ。　　　　（慶大－総合政策）

210　xy 平面において，x 座標，y 座標がともに整数であるような点を格子点ということにする。第1象限の格子点で，直線 $y=2x$ 上にある点を原点Oに近い方から P_1，P_2，P_3，$\cdots$ とし，同じく $y=\dfrac{1}{2}x$ 上にある点を原点Oに近い方から Q_1，Q_2，Q_3，$\cdots$ とする。

(1)　$\triangle OP_1Q_2$，$\triangle OQ_2P_3$ の面積 S_1，S_2 を求めよ。また一般に $\triangle OP_{2k-1}Q_{2k}$，$\triangle OQ_{2k}P_{2k+1}$ の面積 S_{2k-1}，S_{2k} $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は k のどのような式で表されるか。

(2)　S_1，S_2，$\cdots$，S_{100} は(1)における面積を表すものとするとき，$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_{100}}$ の値を求めよ。　　　　（岩手大－農）

211 2つの整数 n, l によってきまる数列 $a_{n,l}=(l+2)2^n$ がある。

(1) $a_{1,l}$ ($l=1, 2, 3, \cdots$) は初項$\boxed{}$，公差$\boxed{}$の等差数列で，その第1項から第$\boxed{}$項までの和は104である。

(2) $a_{n,2}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) は初項$\boxed{}$，公比$\boxed{}$の等比数列で，その第1項から第$\boxed{}$項までの和は504である。

(3) N, L を正の整数とするとき，$a_{n,l}$に対して，n について1から N までの和，l について1から L までの和をとると，$\{(\boxed{})^N-1\}(L^2+\boxed{}L)$ となる。 (東邦大－薬)

212 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\dfrac{n+1}{n+2}$ $(n\geqq 1)$ をみたすとき，
数列の和 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ を求めよ。 (滋賀大－教育)

213 数列 $\{a_n\}$ は任意の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}3^{-k}a_{n-k}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ をみたしているとする。
このとき，$m\geqq 3$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}na_n$ を求めよ。 (東北大－理系)

214 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について，初項から第 n 項までの和をそれぞれ S_n, T_nとする。

$$S_n=2n(n+2),\quad T_n=\frac{n}{6}(2n^2-3n+13)$$

のとき，$a_1=\boxed{}$，$a_n=\boxed{}$，$b_1=\boxed{}$，$b_n=\boxed{}$ である。また，数列 $\{a_nb_n\}$ の初項から第 n 項までの和は$\boxed{}$となる。 (慶大－商)

215 2つの数列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ をそれぞれ

$$a_k=\frac{1}{k!}\ (k=1,\ 2,\ \cdots),\quad b_k=\frac{1}{k(k+1)}\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

と定める。また，$n=1, 2, \cdots$ に対して

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k,\quad t_n=\sum_{k=1}^{n}b_k,\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

とおく。このとき，任意の n について，次の(1), (2), (3)を証明せよ。

(1) $s_n<0$ (2) $t_n<1$ (3) $u_n<2$ (東北大－理系)

216 (1) 実数 x_i, y_i を係数とする n 個の t の2次式 $(x_it-y_i)^2=x_i^2t^2-2x_iy_it+y_i^2$ ($i=1, 2, \cdots, n$) を用いて，不等式 $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=10$, $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=25$ をみたすとき，a_5 の最大値を求めよ。 (早大－政経)

217　数列 a_1，a_2，a_3，…を次のように定める。

$$a_1=1,\ a_2=a_3=2,\ a_4=a_5=a_6=3,\ \cdots$$

(1)　与えられた自然数 n に対して，$a_i=n$ となるような i の範囲を求めよ。

(2)　m を自然数とするとき，この数列の初項から第 $2m^2$ 項までの総和を求めよ。　(一橋大)

218　数列　a，b，a^2，ab，b^2，a^3，a^2b，ab^2，b^3，a^4，a^3b，a^2b^2，ab^3，b^4，a^5，a^4b，…
について，初項 a から a^mb^n までの和を $S(m,\ n)$ とする。ただし，$ab\neq0$，$a\neq b$ とする。

(1)　上の数列において，a^{15}，$a^{15}b^8$ はそれぞれ何番目の項か。

(2)　$S(n,\ n+8)-S(n+8,\ n)$ を a，b，n を用いて表せ。

(3)　$b=-a$ のとき，$S(0,\ 2n)$，$S(n,\ n)$ を求めよ。　(宮城教育大)

219　偶数の数列 2，4，6，8，… が下の図のように配列されている。

	1組	2組		3組			4組				……
上段	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42 …
下段	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44 …

(1)　第 n 組の上段の最初の数 a_n を求めよ。

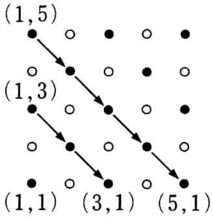
(2)　第 n 組の上段と下段のすべての数の和を S_n とする。S_n を n で表せ。

(3)　30 という偶数は第 4 組の上段の 2 番目に位置する。それでは，1000 という偶数の位置を求めよ。　(山形大－工)

220　図のように，格子点の列

(1，1)，(1，3)，(2，2)，(3，1)，(1，5)，(2，4)，(3，3)，…

をつくる。



(1)　この列に関し，(15，5) は第 $\boxed{}$ 番目の点であり，また，第 200 番目の点は（$\boxed{}$，$\boxed{}$）である。

(2)　さらに，上の点列を用いて，数列 $a_1=2^{1+1}$，$a_2=2^{1+3}$，$a_3=2^{2+2}$，$a_4=2^{3+1}$，… をつくると，$a_1+a_2+\cdots+a_{n^2}=\boxed{}$ である。　(慶大－総合政策)

221　正の整数を，右の表のような順に並べるものとする。

1	2	9	10	…	…
4	3	8	11	…	…
5	6	7	12	…	…
16	15	14	13	…	…
17	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…

(1)　最左端の縦列において，上から m 番目に位置する数を m で表せ。

(2)　最上段の横列において，左から n 番目に位置する数を n で表せ。

(3)　上から m 番目，左から n 番目に位置する数を m と n で表せ。　(明治大－政経)

9 ——— 漸化式，数学的帰納法，二項定理

入試対策 数列の発展タイプとして，漸化式の問題がますます増加している。基本の型の解法をまず完全にマスターしたあとで，これらの基本形をどう発展させて問題を解いていくか，これは問題演習で力を養う以外に手がない。また，数学的帰納法は推論のプロセスをどう表現するか，考え方になれると同時に，証明を何度もノートに書いて練習する必要がある。二項定理の問題は，一般項の公式を確実に覚えて使用することに限る。多項定理の公式も覚えた方がよい。

1st step

☞解答は「考え方と解答」55 ページ

222 次の漸化式で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ （芝浦工大）

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ （琉球大）

(3) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ （九州芸工大）

(4) $a_1=1$，$\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k-1}}=k$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ （昭和薬大）

223 漸化式 $a_1=0$，$a_{n+1}=3a_n+2^n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{3^{n-1}}$ とおくとき，b_n と b_{n+1} の間に成り立つ関係式を書け。

(2) (1)の b_n を求めよ。

(3) a_n を求めよ。 （神戸大－文系）

224 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+a_{n-1})$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。

(1) この数列の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 一般項 a_n を n の式で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ。 （山形大－教育）

225 数列 a_1，a_2，$\cdots$ が $a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められている。

(1) $b_n=\dfrac{a_n+\alpha}{a_n+\beta}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ が等比数列になるような α，β $(\alpha\neq\beta)$ の組を1つ求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。 （千葉大）

226 $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n-n$（$n=1$，2，3，…）で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項a_nを求めよ。

（宮崎大）

227 $a_1=0$，$a_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^3 a_{n-1}+\dfrac{n-1}{n^2}$（$n=2$，3，…）で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（学習院大－経済）

228 $a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$（$n=1$，2，3，…）で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) すべての自然数nに対して，$a_n\neq 3$を示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（鹿児島大－理）

229 数列 $\{a_n\}$ が $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$（$n\geqq 3$），$a_1=3$，$a_2=7$ で定義されている。

(1) $a_n-pa_{n-1}=q(a_{n-1}-pa_{n-2})$ をみたす実数p，qを求めよ。

(2) a_n を求めよ。

（関西学院大－商）

230 すべての自然数nについて，$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は31で割り切れることを証明せよ。

（宮崎大－農・教育）

231 nは2以上の自然数とする。数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2$$

（北大－文系）

232 $0<x<1$のとき，すべての自然数nについて次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1-x^3}{(1-x)^n}\geqq 1+nx+\frac{n(n+1)}{2}x^2$$

（大分大－工・教育）

233 次の関係式で定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$4(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=(2n+1)a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 一般項 a_n を推定し，数学的帰納法によって証明せよ。

(2) $S_n=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$ を求めよ。

（北海道教育大）

234 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$, $a_{n+1}a_n+2a_{n+1}-8=0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ をみたしている。

(1) $1\leqq a_n\leqq\frac{8}{3}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ であることを数学的帰納法により証明せよ。

(2) $|a_n-2|\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ。 (高知大)

235 (1) $(2+x)^{10}$ の展開式における最大の係数は $\boxed{}$ である。 (神奈川大－工)

(2) $\left(x^3+x-\frac{1}{x}\right)^9$ の展開式における x の係数を求めよ。 (京都教育大)

(3) $\left(x+\frac{1}{2x}+1\right)^{10}$ の展開式の x^8 の係数と x^9 の係数の比を最も簡単な整数の比で表せ。

(東京理大－理)

236 多項式 $(px+q)^8+(qx+p)^8$ を展開し，x^5 の係数を α を使って表すと，α の何次式になるか。ただし，$\alpha=pq$, $p, q\geqq0$, $p+q=1$ とする。 (自治医大)

2nd step

☞解答は「考え方と解答」59 ページ

237 数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ は次の関係をみたしている。

$$a_1=1,\ 3(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)a_n$$

(1) $n\,a_{n+1}=(n+2)a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ を求めよ。 (千葉大)

238 正の数の数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=\frac{1}{2}a_n(a_n+1)\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

をみたしているとき，一般項 a_n を求めよ。 (広島大－文系)

239 次の関係式で定まる 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$$a_1=b_1=1,\ a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=4a_n+b_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 数列 $\{a_n+k\,b_n\}$ が等比数列となるように定数 k の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。 (北海道教育大)

240 自然数 n と実数 x が，$n\geqq2$, $0<x<1$ をみたすとき，$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n>1-x$ を証明せよ。

(山口大－教育・農・経済)

241 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$（$n=1$，$2$，$3$，…）とする。

(1) $\sqrt{2}<a_{n+1}<a_n$（$n=1$，2，3，…）を示せ。

(2) $a_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2}$（$n=1$，$2$，$3$，…）を示せ。

(3) $|a_5-\sqrt{2}|<10^{-10}$ を示せ。ただし，$1.41<\sqrt{2}<1.42$ を用いてよい。（神戸大）

242 数列 $\{a_n\}$ は次の関係式をみたしている。

(ア) $a_1=1$

(イ) $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1)$（$n=1$，$2$，$3$，…）

この数列の第 n 項 a_n が n であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。（大阪市大－理系）

243 数列 $\{a_n\}$（$n=1$，2，3，…）を $a_1=1$，$a_n=\dfrac{(n-1)^3(n-2)^3(n-3)^3\cdots(2-1)^3}{(n^3-1)\{(n-1)^3-1\}\{(n-2)^3-1\}\cdots\{2^3-1\}}$

（$n\geqq2$）で定め，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

(1) a_n を n と a_{n-1} の式として表せ。

(2) $\dfrac{S_1}{a_1}$，$\dfrac{S_2}{a_2}$，$\dfrac{S_3}{a_3}$ を求めよ。

(3) (2)から $\dfrac{S_n}{a_n}$ が n のどのような式になるかを予想し，その式を証明せよ。（東北大－文系）

244 次の3条件(イ)，(ロ)，(ハ)をみたすような数列 $\{a_n\}$ を考える。

(イ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{n+l}$（$n=1$，$2$，…）　(ロ) $a_{2n}=\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n-1}+1}$（$n=1$，$2$，…）

(ハ) $a_n>0$（$n=1$，2，…）

この数列の第 n 項 a_n を求めよ。（阪大－理）

245 数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{n+1}$（$n=1$，$2$，…）

このとき，各自然数 n に対して，不等式 $a_n\leqq\dfrac{4}{n}$ が成り立つことを証明せよ。（京大－文系）

246 $a_1=p$，$a_2=q$，$a_3=r$，$a_{n+3}-3a_{n+1}+2a_n=0$（$n=1$，2，…）で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくとき，$b_1=q-p$，$b_2=r-q$ で，漸化式

$$b_{n+2}+\boxed{}\,b_{n+1}-\boxed{}\,b_n=0\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$ が成り立つ。

(2) 一般項 a_n は $\dfrac{\boxed{}\,p+\boxed{}\,q-\boxed{}\,r}{9}+\dfrac{-\boxed{}\,p+\boxed{}\,q+\boxed{}\,r}{3}(n-1)$

$$+\frac{\boxed{}\,p-\boxed{}\,q+\boxed{}\,r}{9}(-2)^{n-1}$$ である。

(3) $r=4$ とすれば，数列 $\{a_n\}$ が等比数列になるのは $(p,\ q)=(\boxed{},\ -\boxed{})$ または $(p,\ q)=(\boxed{},\ \boxed{})$ のときである。（東京理大－理）

247　各項が 0 以上 6 以下の整数であるような $\{a_n\}$ を次のように定める。

「$a_1=1$，かつ $n\geqq 1$ のとき a_{n+1} は $3a_n$ を 7 で割った余りとする。」

(1)　3^k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ を 7 で割った余りを求めよ。

(2)　すべての自然数 n について，$a_n-3^{n-1}a_1$ は 7 の倍数であることを証明せよ。

(3)　すべての自然数 n について，$a_{n+6}=a_n$ となることを(1)，(2)の結果を用いて証明せよ。

（佐賀大－理工・農）

248　x 軸上の点 $\mathrm{A}_1(x_1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2(x_2,\ 0)$，…，$\mathrm{A}_n(x_n,\ 0)$ に対して，直線 $l：y=kx\ (k>0)$ 上の点 $\mathrm{B}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}_2(x_2,\ y_2)$，…，$\mathrm{B}_n(x_n,\ y_n)$ を $x_{i+1}=x_i+y_i$ を満足するように定める。

ただし，$x_1=a$，$x_i>0$，$y_i>0$ とする。

(1)　点 $\mathrm{B}_n(x_n,\ y_n)$ の座標を求めよ。

(2)　線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i$ と $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ を 2 辺とする正方形の面積 s_i を求めよ。

(3)　正方形の面積の総和　$s_1+s_2+\cdots+s_n$ を求めよ。

（図書館情報大）

249　自然数 $n\geqq 1$ について，2 種類のすべて相異なる命題 P(n)，Q(n) がある。いま，P(n) が正しいならば Q$(n+1)$ が正しく，Q(n) が正しいならば P$(n+1)$ も正しいことが証明されたとする。このとき，次の問いに理由をつけて答えよ。

(1)　P(1) が正しいとき，Q(10) は正しいといえるか。また P(10) はどうか。

(2)　(1)の仮定に加えて，さらに Q(9) も正しいとき，P(n) はどのような自然数に対して正しいといえるか。

（東北大－文系）

250　n を自然数，$P(x)$ を n 次の多項式とする。$P(0)$，$P(1)$，…，$P(n)$ が整数ならば，すべての整数 k に対し，$P(k)$ は整数であることを証明せよ。

（東京工大）

251　x は 0 でない実数とする。

(1)　$x+\dfrac{1}{x}$ が整数ならば，すべての正の整数 n に対して $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ も整数であることを示せ。

(2)　$x-\dfrac{1}{x}$ が 0 以外の整数ならば，$x^2-\dfrac{1}{x^2}$ は整数でないことを示せ。

（一橋大）

252　n を 4 以上の自然数とする。$(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$ を展開したときの x^4 の係数を求めよ。

（京大－文系）