10 平面幾何

入試対策 ここでの内容は中学校で習った図形の性質の延長で，基本的な手法は合同と相似および円の性質である。この際，もう一度中学校での学習内容をまとめて復習し，自分で公式集をつくるとよい。自分で図をかくことは鉄則で，大局的に図形を見渡してどんな定理が使われそうかと考えることが大切。何重にもひねった問題は出ない。１つの方法で解けたら，ほかの方法はないかと発展的に考えることが実力をつけるもとになる。

1st step

☞解答は「考え方と解答」63 ページ

253 ▱ABCD において，辺 AD，BC の中点をそれぞれ E，F とすれば，対角線 AC は BE，DF によって 3 等分される。B と D を結び，三角形の重心の性質を用いて上のことがらを証明せよ。

254 直角三角形 ABC の内接円が斜辺 BC に接する点を D とすれば，

$$\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}=\triangle\mathrm{ABC}$$

であることを証明せよ。 （横浜市大，長崎大）

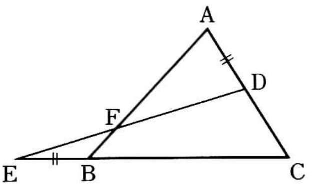
255 $\triangle$ABC において，$\angle$B，$\angle$C の二等分線の交点を D とするとき，$\angle\mathrm{BDC}-\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。 （三重大）

256 $\triangle$ABC において，辺 AB の中点を M，線分 CM 上の点を N とし，M を通り直線 AN に平行な直線と辺 BC との交点を P とする。CN：NM＝3：5 のとき，BP：BC を求めよ。 （熊本大）

257 右の図の $\triangle$ABC で，辺 AC 上に点 D，CB の延長上に点 E をとり，AD＝BE であるとする。このとき，DE と AB の交点を F とすれば，

$$\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=\mathrm{EF}:\mathrm{DF}$$

であることを証明せよ。

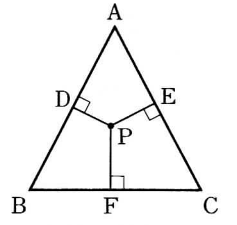


258 円Oと，その外部に線分ABがある。点Pが円Oの周上を動くとき，△PABの重心Gはどんな線上を動くか。 (金沢大)

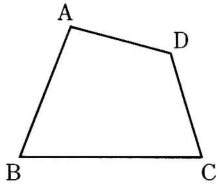
259 (1) 右の図の△ABC (AB＝ACかつ∠Aは鋭角) において，内部の点PからAB，ACにひいた垂線PDとPEの長さの和が，PからBCにひいた垂線PFの長さに等しいとき，Pの軌跡は定線分であることを証明せよ。

(2) AB＝AC＝2BC＝1 cmであるとき，(1)の軌跡の長さを求めよ。

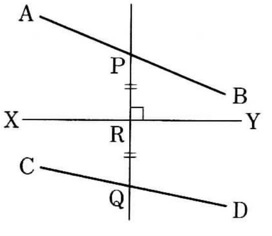
(早 大)



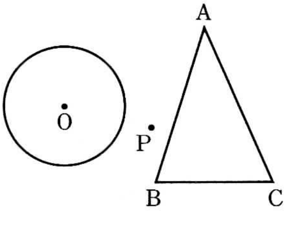
260 右の図の四角形ABCDにおいて，頂点Aを通る直線をひいてこの四角形の面積を2等分したい。作図法を述べよ。



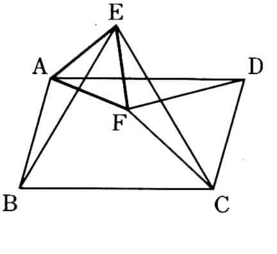
261 右の図のように，直線XYの両側に2つの線分ABとCDが与えられている。XYに垂直な直線がAB, CD, XYと交わる点をそれぞれP, Q, Rとする。PR＝RQとなるようなXYの垂線PQを作図せよ。



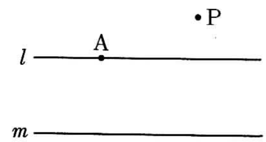
262 右の図のように，円Oと△ABCがある。与えられた点Pを通る線分QRをひき，Qが円Oの周上に，Rが△ABCの周上にあるものとする。このとき，PがQRの中点であるという。線分QRをどのようにひけばよいか。



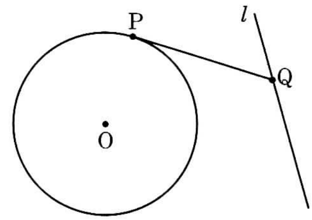
263 右の図の ▱ABCDで，辺BCを1辺とする正三角形を△EBC，辺CDを1辺とする正三角形を△FCDとする。このとき，△AEFは正三角形であることを証明せよ。



264　右の図で，2直線 l，m は平行であり，A は l 上の定点である。定点 P を通る直線をひき，l，m との交点をそれぞれ B，C とし，AB＝AC となるようにせよ。　（高知大）



265　右の図のように，円 O と，その外部に直線 l がある。円周上の点 P で円 O の接線をひき，l との交点を Q とする。PQ の長さが最小となるような P の位置を求めよ。　（一橋大）



266　等角五角形 ABCDE がある。

(1)　1つの頂角の大きさは何度か。

(2)　AB＝BC＝DE であるとき，この五角形は正五角形であるといえるか。　（京都教育大）

267　△ABC の内接円が BC，CA に接する点をそれぞれ D，E とし，内心を I とする。2直線 AI，ED の交点を G とするとき，BG は AG に垂直であることを証明せよ。　（東京商船大）

268　△ABC の垂心を H とし，直線 CH 上に1点 L をとって∠ALB が直角になるようにする。△ABC の面積を S_1，△AHB の面積を S_2 として，△ALB の面積を求めよ。　（姫路工大）

269　△ABC の外心を O，垂心を H とする。

(1)　BO の延長が △ABC の外接円と交わる点を N とするとき，AH＝CN であることを証明せよ。

(2)　AH＝AO のとき，∠BAC は何度か。　（山口大）

270　△ABC で，∠A＝2∠B であるとき，BA の A の方の延長上に AC＝AD となるような点 D をとる。このとき，次の(1)～(3)を証明せよ。

(1)　∠ACD＝∠ABC

(2)　△ABC の外接円は点 C で直線 CD に接する。

(3)　BC^2＝AC(AB＋AC)

2nd step

☞解答は「考え方と解答」66 ページ

271 正三角形 ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R をとるとき，△PQR が正三角形となるための必要で十分な条件は，AR＝BP＝CQ が成り立つことである。このことを証明せよ。（お茶の水女大）

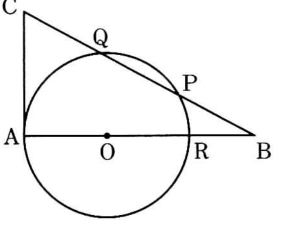
272 長方形 ABCD がある。辺 BC 上の任意の点 P を通って対角線 BD に平行線をひき，辺 CD との交点を Q とする。このとき，P から AQ にひいた垂線は定点を通ることを証明せよ。（京都府大）

273 円 O 外の点 P からこの円に 2 つの接線をひき，その接点を A, B とする。線分 PA の中点 M と B を結ぶ線分 MB が円 O と交わる点を C とし，直線 PC が円 O と再び交わる点を D とする。

(1) ∠APD＝∠PDB であることを証明せよ。

(2) 円 O の半径を 1，∠APB＝45° とするとき，線分 BD の長さを求めよ。（阪　大）

274 右の図において，円 O の半径は r，AC は A でこの円に接し，CQ＝QP＝PB であるとする。AB の長さを r で表せ。（東京医歯大）



275 円 O と，それに交わらない定直線 g がある。g 上の定点 A（ただし，OA⊥g ではない）において g に接し，円 O と交わる任意の円をかき，その交点を P, Q とする。直線 PQ と g との交点を B，B より円 O への 1 つの接線の接点を C とするとき，次を証明せよ。

(1) BA＝BC

(2) B は定点である。（鹿児島大）

276 内接円 I が外心 O を通る二等辺三角形 ABC において，底辺 BC の中点を D とし，BD＝a，AB＝b とする。

(1) AD を a，b で表せ。

(2) AI：ID を a，b で表せ。

(3) AO を a，b で表せ。

(4) △OBD から a：b の値を求めよ。（弘前大）

277 線分 AB を直径とし，点 O を中心とする半円周 $\overset{\frown}{AB}$ がある。線分 OA 上の点 C より出た光が $\overset{\frown}{AB}$ 上の点 E で反射し，次に $\overset{\frown}{EB}$ 上の点 F で反射して線分 OB 上の点 D を通るという。このとき，OC=OD ならば，四角形 CEFD はどんな四角形であるか。 (岡山大)

278 線分 AB を直径とする半円周上に点 P をとり，$\angle PAB=30°$ とする。AP の中点を M とし，P より BM に垂線をひき，その延長が AB と交わる点を K とする。このとき，AK：BK の値を求めよ。 (大阪府大)

279 円に外接する四角形 ABCD において，△ABC の内接円と△ACD の内接円は互いに接することを証明せよ。 (東京工大・金沢大)

280 △ABC において，AB：AC=2：3 である。AB，BC の中点をそれぞれ M，N とし，∠A の二等分線が MN，BC と交わる点をそれぞれ P，D とするとき，$\dfrac{AP}{PD}$ および $\dfrac{MP}{PN}$ の値を求めよ。 (日本大－理工)

281 頂角 A が 36° の二等辺三角形 ABC 内に点 P をとり，AP：BP=BP：CP=AB：BC とする。

(1) △ABP を A のまわりに回転して AB が AC に重なるところまできたときの位置を △ACQ とすれば，△APQ，△CPQ の 3 つの内角はそれぞれ何度か。

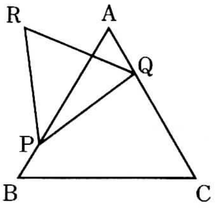
(2) ∠APB，∠APC を求めよ。 (神戸大)

282 正三角形 ABC の外接円の中心 O を通って AB に平行な直線をひき，劣弧 BC との交点を D とする。

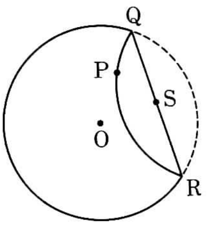
(1) AD=BD+DC であることを証明せよ。

(2) 外接円の半径の長さが $\sqrt{2}$ であるとき，BD+DC の長さを求めよ。 (北　大)

283 右の図のように正三角形 ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 P，Q をとり，直線 PQ に関して A と同じ側に正三角形 PQR をつくる。このとき，点 R はどのような軌跡をえがくか。 (北　大)



284 右の図のように，円 O 内に定点 P がある。この円を折り曲げ，折り曲げられた円弧が P を通るようにするとき，折り目の弦を QR とする。QR の中点を S とすると，S はどんな図形をえがくか。 (慶大ー工)



285 (1) △ABC の辺 BC の中点を M とするとき，

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

であることを証明せよ。

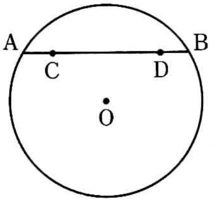
(2) $BP^2+CP^2=2AP^2$ をみたす△ABC の内部の点 P は，どんな図形をえがくか。 (神戸大)

286 △ABC の外心を O とし，点 P を△ABC の辺上の点とする。半直線 OP 上に点 Q をとり，$OP \cdot OQ=OA^2$ となるようにするとき，点 Q はどんな曲線上にあるか。 (金沢大)

287 円 O の弦 AB 上に 2 点 C，D が図のように与えられていて，AC＝BD である。劣弧 AB 上に点 P を求め，C を通る弦 PQ，D を通る弦 PR をつくるとき，PC＝DR となるようにしたい。

(1) P の作図法を述べよ。

(2) (1)で求めた P が条件に適することを証明せよ。 (神戸大)



288 ∠XOY とその内部に定点 A が与えられている。OX 上に点 P をとり，P における OX の垂線が OY と交わる点を Q とするとき，PA：PQ＝2：3 であるという。このような点 P を作図によって求めよ。 (香川大)

289 △ABC において，∠A＝90°，AB＝AC である。

(1) 辺 BC 上に点 P があるとき，辺 CA，AB 上にそれぞれ点 Q，R をとって，△PQR が正三角形となるようにせよ。

(2) (1)の作図ができるためには，P は BC 上のどんな範囲にあればよいか。 (都立大)

290 半円の定直径を AB とする。A を出発して半円周上を B まで動く点 P がある。AP を 1 辺とし，AP に関して B と反対側に正方形 APQR をつくるとき，その対角線 PR の通過する部分を図示せよ。 (東京医大)